

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И. И. МЕЧНИКОВА
ИЛЬИЧЕВСКИЙ ИНСТИТУТ

Г. С. ДРАГАН
С. В. ФЕДОРОВСКИЙ

**ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ
ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ЛОГИКИ
ПРЕДИКАТОВ**

**Учебно-методическое пособие для студентов первого курса
направления подготовки 040301 «Прикладная математика»**

ОДЕССА
ОНУ
2014

УДК 510.6:378
ББК 22.122Я73
Э 456

Рекомендовано к печати Научно-методическим советом
Одесского национального университета имени И. И. Мечникова.
Протокол № 2 от 19 декабря 2013 г.

Рецензенты:

Д. В. Дмитришин, д.т.н., профессор, зав. кафедрой прикладной математики и информационных технологий Одесского национального политехнического университета;

А. А. Кореновский, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой математического анализа ИМЭМ ОНУ имени И. И. Мечникова;

В. Т. Швец, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой прикладной математики Одесской национальной академии пищевых технологий.

Драган Г. С.

Э 456 Элементы алгебры высказываний и логики предикатов : учебно-методическое пособие / Г. С. Драган, С. В. Федоровский. – Одеса : «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2014. – 100 с.
ISBN 978-617-689-075-1

Настоящее методическое пособие предназначено для студентов младших курсов.

В нем рассмотрены элементы алгебры высказываний и логики предикатов, позволяющие студентам I курса получить представление о правильных формах рассуждений и о правильности самих рассуждений.

**УДК 510.6:378
ББК 22.122Я73**

Содержание

| | |
|--|----|
| Введение | 4 |
| 1. Высказывания. Логические операции над высказываниями..... | 5 |
| 2. Формулы АВ. Классификация формул. Таблицы Квайна..... | 10 |
| 3. Основные законы АВ. Теоремы «о подстановке» и «о замене»..... | 20 |
| 4. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ)..... | 26 |
| 5. Логическое следствие в АВ, свойства, критерий..... | 33 |
| 6. Рассуждения в АВ, проверка их правильности..... | 37 |
| 7. Предикаты. Классификация предикатов в данной области..... | 49 |
| 8. Кванторы. Два способа образования высказываний в ЛП..... | 52 |
| 9. Формулы ЛП..... | 57 |
| 10. Интерпретации формул ЛП..... | 61 |
| 11. Классификация формул ЛП | 63 |
| 12. Основные нетривиальные законы ЛП..... | 66 |
| 13. Предваренная нормальная форма..... | 75 |
| 14. Ограниченные кванторы..... | 79 |
| 15. Логическое следствие в ЛП. Рассуждения в ЛП..... | 82 |
| Задачи для самостоятельного решения..... | 85 |
| Ответы..... | 88 |
| Список использованной литературы | 98 |

Введение

Настоящее методическое пособие предназначено для студентов первого курса направления подготовки 040301 «Прикладная математика» и по сути представляет собой конспект лекций. Количество отводимых на курс «Математическая логика и теория алгоритмов» учебных часов явно недостаточно для подробного и обстоятельного изучения тем этого курса. Этот факт и новизна материала (нет необходимой базы со средней школы) вызывают у студентов трудности в процессе изучения тем «Алгебра высказываний» и «Логика предикатов». Для устранения этого пробела и для облегчения процесса обучения, студентам предлагается подробное изложение этих тем с доказательством большинства необходимых теорем, подробным решением иллюстрирующих примеров. В настоящем методическом пособии рассмотрены в минимальном объеме элементы теории, необходимые для понимания последующего материала курса и в дальнейшем обучении. В конце даются задачи для самостоятельного решения с указанием ответов этих задач и приводится список рекомендуемой литературы.

Предлагаемое методическое пособие будет полезно также студентам направлений подготовки 050102 «Компьютерная инженерия» и 040201 «Математика» и вообще всем студентам, изучающим элементы логики.

Они также необходимы студентам-иностранцам, ибо большинство из них к первому курсу обучения не владеют в достаточной степени языком страны пребывания и, следовательно, не в состоянии вести нормальные конспекты лекций.

1. Высказывания. Операции над высказываниями

Логика – наука о правильных формах рассуждений. Основы этой науки систематизировал и развил в своих работах древнегреческий математик Аристотель в IV веке до н.э. Идеи построения математической логики были высказаны немецким математиком Лейбницем в начале XVIII века и развиты в работах английского математика Джона Буля в 40-х годах девятнадцатого века. Джон Буль и превратил логику в математическую, создав алгебру, в которой высказывания обозначались буквами.

Значение логики заключается в первую очередь в том, что знание основ этой науки формирует логическую культуру мышления человека, помогает ему правильно мыслить, избегать логических ошибок в своих рассуждениях, корректно аргументировать собственную точку зрения, а также успешно пользоваться методами критики и опровержения.

В основе содержательной математической логики лежит понятие высказывания. Это понятие относится к неопределяемым понятиям математики так же, как, например, понятия точки, прямой, плоскости в геометрии или множества в математическом анализе. *Под высказыванием понимают некоторое повествовательное предложение утверждающее что-либо о чем-либо и непременно истинное или ложное.*

Пример 1.1.

1. Днепр – река Европы. - Высказывание, истинное.
2. Утро. - Не является высказыванием, т.к. предложение не имеет никакого утверждения.

3. Когда наступит Новый Год? - Не является высказыванием, т.к. предложение не является повествовательным.

4. $2 \times 2 = 5$. - Высказывание, записанное символически, ложное.

5. Человек, ростом 180см. - высокий. - Строго говоря, это предложение высказыванием не является, ибо истинность утверждения, содержащегося в нем, зависит от места, где это утверждение произносится (для людей из Скандинавии это утверждение неверно, а для пигмеев центральной Африки - верное). Такого типа предложения относятся к псевдовысказываниям. Однако, в дальнейшем при анализе рассуждений они допустимы.

Математическая логика не интересуется содержательным смыслом высказываний, а принимает во внимание только тот факт, что каждое высказывание может быть или истинным, или ложным (и не может быть одновременно истинным и ложным). Тот раздел математической логики, который занимается вопросами построения более сложных высказываний из более простых, называется **алгеброй высказываний (AB)**. Сложные высказывания строятся из более простых с помощью логических операций (логических связок). Высказывания, которые нельзя расчленить на более простые высказывания с помощью логических связок называются **простыми** или **атомарными**. Ложность или истинность конкретного высказывания называют **истинностным значением** этого высказывания. В дальнейшем будем рассматривать булево множество $V = \{0,1\}$, элемент которого 0 будем интерпретировать как ложь, а 1 - как истину. Переменные с изменением в V будем называть **пропозициональными** или **высказывательными** переменными и считать, что их значениями являются высказывания. Точные определения логических операций задаются с помощью их таблиц истинности.

Определение 1.1. *Отрицанием высказывания x называют такое высказывание, которое истинно, если исходное высказывание ложно и ложно, если исходное высказывание истинно (обозначение: x' , $\neg x$, \bar{x}). Таким образом,*

| x | $\neg x$ |
|-----|----------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

В нормальной речи отрицание передается частицей «не» или словосочетанием «неверно, что...», т.е. $\bar{\alpha}$ читается «не α » или «неверно, что α ». В дальнейшем для обозначения отрицания мы будем использовать черточку над буквой или выражением.

Определение 1.2. *Дизъюнкцией двух высказываний называется такое их составное высказывание, которое ложно только в том случае, когда оба входящие в него высказывания ложны (обозначение: $x \vee y$). Таким образом,*

| x | y | $x \vee y$ |
|-----|-----|------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

В нормальной речи дизъюнкция передается союзом «или» в неисключающем смысле (возможно наступление как одного события, так и другого, а также и одного и другого одновременно), т.е. $x \vee y$ читается x или y .

Определение 1.3. *Конъюнкцией двух высказываний называется такое их составное высказывание, которое истинно только в том*

случае, когда оба входящие в него высказывания истинны (обозначения: $x \wedge y$, $x \cdot y$, $x \& y$, $x y$). Таким образом,

| x | y | $x y$ |
|-----|-----|-------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

В нормальной речи конъюнкция передается союзом «и», т.е. $x y$ читается x и y . В дальнейшем, для обозначения конъюнкции мы не будем использовать никакой символ (аналогично обычному умножению в математике).

Определение 1.4. *Импликацией* двух высказываний называется такое их составное высказывание, которое ложно только в том случае, когда первое высказывание (посылка) истинно, а второе (заключение) – ложно (обозначения: $x \rightarrow y$, $x \Rightarrow y$). Таким образом,

| x | y | $x \rightarrow y$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Как видим из определения импликации $x \rightarrow y$, для нее существенен порядок перечисления высказываний. Во всякой импликации $x \rightarrow y$ первое высказывание x называется *посылкой* импликации, а второе высказывание y – *заключением* импликации. Истинная импликация $x \rightarrow y$ имеет, в отличие от ранее определенных операций, много чтений:

- 1) x имплицирует y ;
- 2) если x , то y (y , если x);
- 3) когда x , тогда y (y , когда x);
- 4) x только тогда, когда y ;
- 5) x только, если y ;
- 6) y в том случае, когда x ;
- 7) x только в том случае, когда y ;
- 8) из x следует y (y следует из x);
- 9) x достаточно для y ;
- 10) y необходимо для x ;
- 11) x признак y .

Все эти чтения необходимо запомнить, т.к. они существенно используются при формализации рассуждений. В дальнейшем, для обозначения импликации в формулах AB мы будем использовать одиночную стрелочку « \rightarrow », а двойную стрелочку « \Rightarrow » использовать для сокращения записей обычного языка.

Определение 1.5. *Эквиваленцией двух высказываний называется такое их составное высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда высказывания принимают разные логические значения и истинно тогда и только тогда, когда логические значения высказываний одинаковы (обозначения $x \leftrightarrow y, x \Leftrightarrow y, x \sim y, x \equiv y$). Таким образом,*

| x | y | $x \leftrightarrow y$ |
|-----|-----|-----------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Чтения эквиваленции $x \leftrightarrow y$:

1) x эквивалентно y :

2) x равносильно y :

3) x критерий y :

4) остальные чтения эквиваленции связаны с чтениями импликации и конъюнкции, поскольку имеет место логическое тождество $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$. Например, « x тогда и только тогда, когда y » или « x необходимо и достаточно для y » и т.д.

В дальнейшем, для обозначения эквиваленции в формулах АВ мы будем использовать одиночную обоюдную стрелочку « \leftrightarrow », а двойную обоюдную стрелочку « \Leftrightarrow » использовать для сокращения записей обычного языка.

2. Формулы АВ. Классификация формул. Таблицы Квайна

В математической логике формулы понимаются так же, как и в обычной математике – это некоторые последовательности символов, построенные по определенным правилам. Уточним это понятие.

Определение 2.1. *Под алфавитом понимается произвольное непустое множество, элементы которого называются буквами или символами. Произвольная конечная последовательность букв данного алфавита называется словом или выражением в этом (или над этим) алфавитом.*

Определим алфавит алгебры высказываний – множество тех символов, которые допустимы при записи слов (выражений) АВ.

Определение 2.2. Пусть

$A_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ – счетное множество символов (букв)
булевых (пропозициональных) переменных;

$A_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_m, \dots\}$ – счетное множество символов (букв)
булевых (пропозициональных) параметров (в

том числе константы 0 и 1);

$A_3 = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$ – множество символов логических операций;

$A_4 = \{ \langle \rangle, \langle (\rangle, \langle , \rangle \}$ – множество «технических» символов (две скобки – закрывающая и открывающая, и запятая).

Тогда объединение указанных множеств и составляет алфавит алгебры высказываний, т.е. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Множество слов в алфавите A обозначается A^* . Из множества всевозможных слов в данном алфавите правилами построения выделяются **формулы**. Укажем эти правила для алгебры высказываний.

Определение 2.3. Если $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ – алфавит AB , то множество формул AB выделяется из множества слов в этом алфавите следующими правилами построения (здесь ΦAB означает множество всех без исключения формул AB):

1) $(\alpha \in A_1 \cup A_2) \Rightarrow \alpha \in \Phi AB$ (отдельно взятый символ первых двух подалфавитов AB является простейшей (атомарной) формулой AB);

2) $\omega \in \Phi AB \Rightarrow (\omega) \in \Phi AB$ (если на некоторую формулу навесить отрицание и результат окаймить скобками, то полученное слово также является формулой);

3) $\omega \in \Phi AB \wedge \varphi \in \Phi AB \Rightarrow (\omega \odot \varphi) \in \Phi AB$, $\odot \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$ (если некоторые две формулы соединить символом бинарной (двухместной) логической операции и результат окаймить скобками, то полученное слово также является формулой);

4) других формул нет (иными словами, формулы можно строить исключительно по правилам 1 – 3).

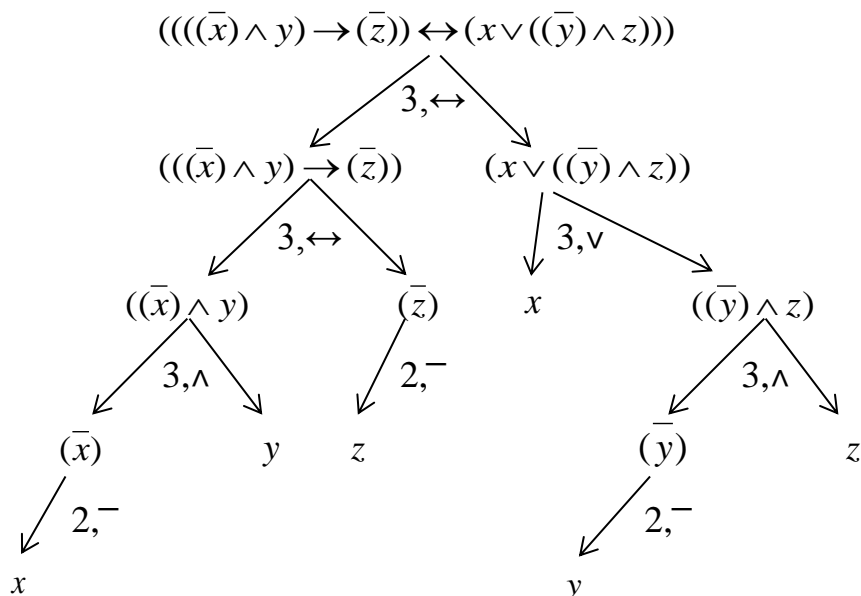
Определение 2.4. Часть (подслово) H заданной формулы F , которая в свою очередь является формулой, называется **подформулой** исходной формулы (обозначение $H \subseteq F$).

С практической точки зрения убедиться в том, является или нет заданное слово формулой, можно с помощью построения ориентированного дерева подформул. Корень такого дерева содержит проверяемое слово, вершины располагаются по ярусам (уровням) и содержат подслова тех слов, которые содержатся на предыдущем ярусе и выделяются из них с помощью одного и только одного из правил построения формул. Ребра же такого дерева исходят из вершин, соответствующих подслов исходного слова и входят в вершины, соответствующие подсловам, выделяемым из подслов предыдущего яруса соответствующим правилом построения формул.

Пример 2.1. Проверить, является или нет следующее слово формулой АВ:

$$f(x, y, z) = (((\bar{x}) \wedge y) \rightarrow (\bar{z})) \leftrightarrow (x \vee ((\bar{y}) \wedge z))$$

Построим дерево подформул для заданного слова. При этом под каждой вершиной будем проставлять номер того правила построения формул, которое используется для выделения подформул, и символ операции, используемой при применении этого правила.



Как видим, каждая ветвь полученного дерева заканчивается переменной (т.е. атомарной формулой по правилу 1 построения формул) и, следовательно, двигаясь по дереву снизу вверх и применяя указанные правила построения формул, мы в каждой вершине дерева будем иметь некоторую подформулу. В частности и корень дерева является некоторой формулой. Таким образом, исследуемое слово формулой является.

Обратим внимание на запись исходной формулы предыдущего примера – в ней присутствуют многочисленные скобки. Это затрудняет восприятие формул. Условимся в дальнейшем использовать следующие правила экономии скобок:

- внешние скобки не использовать (т.е. вместо (F) писать F);
- черта отрицания одновременно заменяет скобки (т.е. вместо (\bar{F}) писать \bar{F});
- если формула не содержит скобок, то в ней операции выполняются в следующем порядке (слева направо в порядке убывания «старшинства» операций) $\bar{, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

В силу принятых соглашений об экономии скобок, формулу предыдущего примера можно записать вообще без скобок в виде

$$f(x, y, z) = \bar{x}y \rightarrow \bar{z} \leftrightarrow x \vee \bar{y}z.$$

Всякое рассуждение, сформулированное на естественном языке, может быть записано подходящей логической формулой. Для этого необходимо в рассуждении выделить простейшие (атомарные) высказывания и, используя чтения логических операций, записать исходный текст формулой. При этом следует помнить, что в естественном языке чтения логических операций может быть разным, а потому следует правильно заменить их на чтения, предложенные при определении операций.

Пример 2.2. Записать логической формулой следующий текст.

«Когда б я был безумец, я б хотел
 В живых остаться, я б имел надежду
 Любовью нежной тронуть ваше сердце;
 Когда б я был безумец, я бы ночи
 Стал провождать у вашего балкона,
 Тревожа серенадами ваш сон,
 Не стал бы я скрываться, я напротив
 Старался быть везде б замечен вами;
 Когда б я был безумец, я б не стал
 Страдать в безмолвии...» (А. С. Пушкин).

Выделим в этом тексте атомарные высказывания, обозначив их большими буквами русского языка (с учетом, может быть, псевдовысказываний).
 Имеем:

- А - «Я был бы безумец»;
- Б - «Я б хотел в живых остаться»;
- В - «Я б имел надежду любовью нежной тронуть ваше сердце»;
- Г - «Я бы ночи стал провождать у вашего балкона»;
- Д - «Я бы тревожил серенадами ваш сон»;
- Е - «Я бы стал скрываться»;
- Ж - «Я бы старался быть везде замечен вами»;
- З - «Я бы стал страдать в безмолвии»;

Тогда текст представляется следующей формулой (прочитать это сложное высказывание, используя атомарные высказывания).

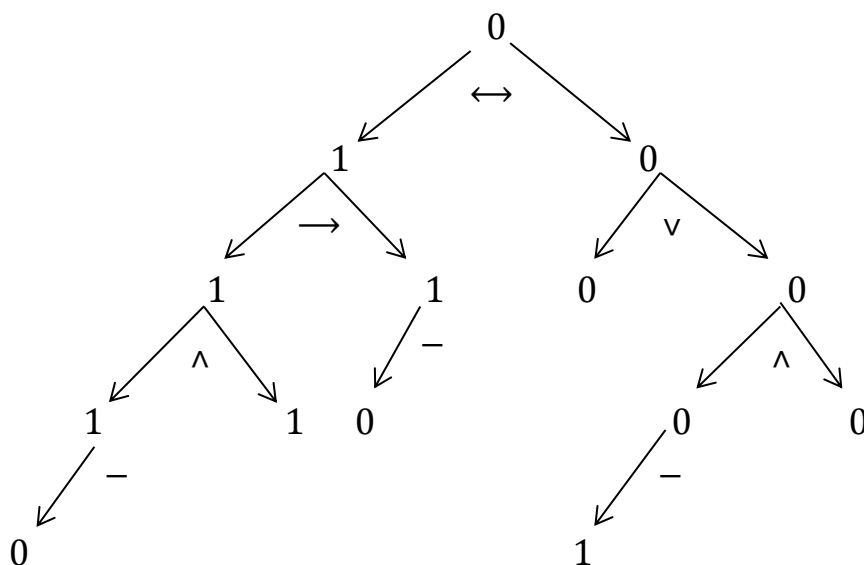
$$(A \rightarrow BV)(A \rightarrow ГД\bar{E}Ж)(A \rightarrow \bar{З}).$$

Если в некоторой формуле АВ все переменные и параметры заменить соответственно конкретными высказываниями, то получим **пропозициональную интерпретацию** исходной формулы. Поскольку, как указывалось ранее, АВ не принимает во внимание содержательный смысл высказываний, а учитывает только их

логические значения, то под пропозициональной интерпретацией формулы АВ мы будем понимать приписывание конкретных значений 0 или 1 переменным и параметрам этой формулы. Пропозициональная интерпретация формулы АВ приводит к некоторому сложному высказыванию, истинностное значение которого мы будем называть **значением формулы** в этой пропозициональной интерпретации или значением формулы на заданном наборе значений переменных.

Пример 2.3. Найти значение формулы $f(x, y, z) = \bar{x}y \rightarrow \bar{z} \leftrightarrow x \vee \bar{y}z$ в пропозициональной интерпретации $x = 0, y = 1, z = 0$ (на наборе значений переменных $(0,1,0)$).

Решение. Воспользуемся деревом подформул исходной формулы и припишем переменным заданные значения, подставив их в вершины дерева на самый нижний уровень каждой ветви дерева (вместо «листьев»). Затем, двигаясь по ветвям дерева снизу вверх, подсчитаем значения каждой из подформул дерева, используя определения операций. Получим:



Таким образом, $f(0,1,0) = 0$. Этот же результат можно было получить непосредственно, подставив заданные значения переменных в

формулу и последовательно выполнив операции согласно договоренности об экономии скобок, а именно

$$f(0,1,0) = \bar{0}1 \rightarrow \bar{0} \leftrightarrow 0 \vee \bar{1}0 = 11 \rightarrow 1 \leftrightarrow 0 \vee 00 = 1 \rightarrow 1 \leftrightarrow 0 \vee 0 = 1 \leftrightarrow 0 = 0.$$

Определение 2.5. Областью истинности формулы f ($OИ(f)$) называется множество тех наборов переменных, на которых формула принимает значение 1 (истина), т.е.

$$OИ(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{\alpha} \in B^n \mid F(\tilde{\alpha}) = 1\}.$$

Аналогично определяется область ложности формулы ($OЛ(f)$):

$$OЛ(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{\alpha} \in B^n \mid F(\tilde{\alpha}) = 0\}.$$

Для областей истинности и ложности данной формулы, очевидно, имеют место соотношения:

$$OИ(f) \cup OЛ(f) = B^n; \quad OИ(f) \cap OЛ(f) = \emptyset.$$

Определение 2.6. Пусть $F \in \Phi AB$. Тогда:

1) F называется **выполнимой**, если существует пропозициональная интерпретация, в которой эта формула истинна, т.е.:

$$F \in ВП \stackrel{\text{def}}{<} (\exists \tilde{\alpha} \in B^n) [F(\tilde{\alpha}) = 1], \quad (OИ(F) \neq \emptyset \text{ или } OЛ(F) \neq B^n).$$

2) F называется **опровержимой**, если существует пропозициональная интерпретация, в которой эта формула ложна, т.е.:

$$F \in ОП \stackrel{\text{def}}{<} (\exists \tilde{\alpha} \in B^n) [F(\tilde{\alpha}) = 0], \quad ((OИ(F) \neq B^n \text{ или } OЛ(F) \neq \emptyset).$$

3) F называется **тождественно истинной (законом, тавтологией)**, если в любой пропозициональной интерпретации эта формула истинна, т.е.:

$$F \in ТИ \stackrel{\text{def}}{<} (\forall \tilde{\alpha} \in B^n) [F(\tilde{\alpha}) = 1], \quad (OИ(F) = B^n \text{ или } OЛ(F) = \emptyset).$$

4) F называется **тождественно ложной (противоречием)**, если в любой пропозициональной интерпретации эта формула ложна, т.е.:

$$F \in ТЛ \stackrel{\text{def}}{<} (\forall \tilde{\alpha} \in B^n) [F(\tilde{\alpha}) = 0], \quad (OИ(F) = \emptyset \text{ или } OЛ(F) = B^n).$$

Все без исключения пропозициональные интерпретации конкретной формулы АВ и значения формулы в этих интерпретациях содержатся в таблице Квайна (Quain) этой формулы. Для рассмотрения таблиц Квайна нам понадобятся некоторые вспомогательные сведения.

Теорема 2.1. *Количество различных n – местных двоичных наборов равно 2^n , т.е.*

$$|B^n| = 2^n.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции (по длине n двоичных наборов).

1) ***База индукции.*** При $n = 1$ существуют всего два двоичных набора длины 1, а именно (0) и (1). Тем самым, $|B^1| = 2^1$ и, следовательно, проверяемая формула верна в этом случае.

2) ***Предположение индукции.*** Предположим, что формула верна для наборов длины k , т.е. $|B^k| = 2^k$.

3) ***Шаг индукции.*** Докажем, что формула остается верной для наборов длины $k+1$, т.е. при $n = k+1$. Рассмотрим B^{k+1} . Имеем:

$$B^{k+1} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}) / \alpha_i \in B\} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0) / \alpha_i \in B\} \cup \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 1) / \alpha_i \in B\} = B_1 \cup B_2.$$

Заметим, что подмножества B_1 и B_2 не имеют общих элементов (не пересекаются). Тогда $|B^{k+1}| = |B_1| + |B_2|$. Количество элементов подмножеств B_1 и B_2 одинаковы и равны количеству наборов длины k , а потому могут быть подсчитаны по предположению индукции. Итак:

$$|B^{k+1}| = |B_1| + |B_2| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Таким образом, доказываемая формула остается верной и при $n = k+1$. Шаг индукции доказан.

4) ***Вывод.*** Для любого натурального n имеет место $|B^n| = 2^n$.

Теорема доказана.

Определение 2.7. Номером $N(\tilde{\alpha})$ двоичного набора $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ называется число $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k$ в двоичной системе счисления.

Пример 2.4. Пусть $\tilde{\alpha}=(0,1,1,0,1)$. Тогда

$$N(\tilde{\alpha})=0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13.$$

Как упоминалось выше, таблицы Квайна содержат все без исключения пропозициональные интерпретации данных формул и значения формул в этих интерпретациях. Рассмотрим правила построения таблиц Квайна.

1) Столбцы таблицы Квайна обозначаются подформулами исходной формулы в порядке усложнения подформул в соответствии с деревом подформул (движение снизу вверх по дереву). Таким образом, первые столбцы таблицы Квайна соответствуют переменным формулы (атомарным подформулам), расположенным в таблице либо в порядке роста индексов переменных, либо в их алфавитном порядке.

2) Заполнение таблицы осуществляется последовательно **не по строкам, а по столбцам** с использованием характеристических свойств логических операций. При этом столбцы для переменных формулы заполняются двоичными наборами, расположенными в этих столбцах, в порядке роста номеров этих наборов.

Пример 2.5. Классифицировать формулу

$$f(x, y, z) = \bar{x}y \rightarrow \bar{z} \leftrightarrow x \vee \bar{y}z.$$

Решение. Построим таблицу Квайна исходной формулы. Она должна содержать одиннадцать столбцов (по числу различных подформул исходной формулы) и девять строк (одну для обозначения подформул и $2^3 = 8$ - для трехместных двоичных наборов). Столбцы для переменных заполняются двоичными трехместными наборами в порядке возрастания номеров этих наборов от 0 до 7. Дальнейшее

заполнение таблицы происходит по столбцам в порядке их следования в таблице. При этом:

- фиксируется очередной столбец;
- находится, какая из логических операций выполняется последней в подформуле, определяющей этот столбец, и над какими подформулами выполняется эта операция (т.е. какие столбцы из заполненных ранее нужно использовать для заполнения зафиксированного столбца);
- столбец заполняется с использованием характеристического свойства операции (в таблицах операций они выделены красным цветом) и т.д.

Окончательно получим:

| x | y | z | \bar{x} | \bar{y} | \bar{z} | $\bar{x}y$ | $\bar{y}z$ | $x \vee \bar{y}z$ | $\bar{x}y \rightarrow \bar{z}$ | $\bar{x}y \rightarrow \bar{z} \leftrightarrow x \vee \bar{y}z$ |
|-----|-----|-----|-----------|-----------|-----------|------------|------------|-------------------|--------------------------------|--|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Заполняя, например, столбец для $\bar{x}y \rightarrow \bar{z}$ мы видим, что нужно применить импликацию в указанном порядке к подформулам $\bar{x}y$ и \bar{z} . Импликация дает 0 в одном единственном случае – когда посылка (т.е. $\bar{x}y$) истинна, а заключение (т.е. \bar{z}) ложно. Просматриваем столбцы для $\bar{x}y$ и \bar{z} в

указанном порядке и ищем следующую комбинацию: 1 – в столбце для \bar{x}_u и 0 – в столбце для \bar{z} . Такая комбинация в указанных столбцах единственная – для строки с третьим набором значений переменных. Проставляем значение 0 в указанной строке заполняемого столбца таблицы, а в остальных местах этого столбца проставляем 1.

По таблице Квайна формулы мы можем найти ОИ и ОЛ данной формулы:

ОИ(f) = {1, 3, 4, 5, 6, 7} – номерами наборов или

ОИ(f) = {(0,0,1), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)} – в явном виде.

ОЛ(f) = {0, 2} = {(0,0,0), (0,1,0)}.

На основании таблицы Квайна формулы можно провести классификацию формулы. В нашем случае $f \in \text{ОП}$, $f \notin \text{ТИ}$, $f \in \text{ВП}$, $f \notin \text{ТЛ}$.

Поскольку порядок расположения наборов значений переменных в таблице Квайна жестко регламентирован (в порядке возрастания номеров наборов), то таблицу формулы можно задавать в сокращенной форме, указывая итоговый столбец таблицы Квайна. В нашем случае f : 01011111.

3. Основные законы АВ. Теоремы «о подстановке»

и «о замене»

Как помним, законом в алгебре высказываний называют любую тождественно истинную формулу. Однако к законам мы будем относить и правильные логические тождества или равносильности. Введем понятие равносильных формул.

Определение 3.1. Две формулы АВ f и g называются **равносильными** (обозначение $f = g$), если в любой пропозициональной интерпретации их значения совпадают. Иначе:

$$(f = g) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \tilde{\alpha} \in B^n) [f(\tilde{\alpha}) = g(\tilde{\alpha})].$$

Очевидны следующие критерии равносильности.

Теорема 3.1. (критерии равносильности)

$$1) (f = g) \Leftrightarrow (OI(f) = OI(g));$$

$$2) (f = g) \Leftrightarrow (OL(f) = OL(g));$$

$$3) (f = g) \Leftrightarrow ((f \leftrightarrow g) = 1) \text{ (иначе } \neq (f \leftrightarrow g));$$

Доказать самостоятельно.

Именно в силу последнего критерия равносильности правильные равносильности (тождества) АВ можно рассматривать, как законы АВ.

3.1. Основные тождества (законы) АВ

Для лучшего запоминания, основные законы АВ перечислим по группам.

3.1.1. Законы традиционной логики:

$$x = x \quad (\text{закон тождества});$$

$$\overline{\overline{x}} = x \quad (\text{двойного отрицания});$$

$$(\text{исключенного третьего}) \quad \overline{x} \vee x = 1 \quad | \quad x \overline{x} = 0 \quad (\text{противоречия}).$$

3.1.2. Законы конъюнкции и дизъюнкции:

$$(\text{ассоциативные}) \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad | \quad x(yz) = (xy)z;$$

$$(\text{коммутативные}) \quad x \vee y = y \vee x \quad | \quad xy = yx;$$

$$(\text{дистрибутивные}) \quad \text{I. } x(y \vee z) = xy \vee xz \quad | \quad \text{II. } x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z);$$

$$(\text{поглощения}) \quad x(x \vee y) = x \quad | \quad x \vee xy = x;$$

$$(\text{склеивания}) \quad \overline{x}y \vee xy = x \quad | \quad (x \vee \overline{y})(x \vee y) = x;$$

$$(\text{идемпотентности}) \quad x \vee x = x \quad | \quad xx = x;$$

$$(\text{de Morgan'a}) \quad \overline{x \vee y} = \overline{x} \overline{y} \quad | \quad \overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y};$$

3.1.3. Законы постоянных:

$$0 \vee x = x \quad | \quad 1x = x;$$

$$1 \vee x = 1 \quad | \quad 0x = 0;$$

3.1.4. Законы связи между операциями:

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y;$$

$$\overline{x \rightarrow y} = x \bar{y};$$

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) = \bar{x} \bar{y} \vee xy;$$

$$x + y = \overline{x \leftrightarrow y} = \bar{x} y \vee x \bar{y};$$

В приведенном перечне основных тождеств многие законы, для лучшего их запоминания, разделены вертикальной чертой. Каждый из них получается из другого заменами конъюнкций на дизъюнкции и наоборот, а также констант 0 на 1 и наоборот.

Каждый из перечисленных выше законов АВ можно доказать с помощью таблиц Квайна с использованием определения равносильных формул.

Теорема 3.2 . (о подстановке). Если в произвольный закон АВ вместо некоторой переменной *всюду*, где эта переменная встречается в законе, подставить произвольную формулу АВ, то полученная в результате формула также является законом АВ.

$$\begin{aligned} & (\models f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)) \wedge (g(y_1, y_2, \dots, y_m) \in \Phi_{AB}) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\models f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, g(y_1, y_2, \dots, y_m), x_{i+1}, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Доказательство. Если формула *f* зависит от *n* переменных (например, от $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$), а произвольная формула АВ *g* зависит от *m* переменных (например, от y_1, y_2, \dots, y_m), то результат подстановки *g* в *f* вместо некоторой переменной (например, x_i) зависит от *n + m - 1* переменной, а именно:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, g(y_1, y_2, \dots, y_m), x_{i+1}, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y_1, y_2, \dots, y_m, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Тогда если $\tilde{\alpha}' \in V^{n+m-1}$ – произвольный набор значений переменных формулы

$F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y_1, y_2, \dots, y_m, x_{i+1}, \dots, x_n)$ и $\tilde{\alpha}' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \beta_1, \dots, \beta_m, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$,

то

$$F(\tilde{\alpha}') = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \beta_1, \dots, \beta_m, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) =$$

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) =$$

Поскольку константа $g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in B$, то обозначим ее α_i . Тогда получим:

$$= f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = f(\tilde{\alpha}).$$

И, наконец, поскольку $\vDash f$, то $f(\tilde{\alpha}) = 1$. Таким образом, $(\forall \tilde{\alpha}') [F(\tilde{\alpha}') = 1]$, т.е. $\vDash F$ и теорема доказана полностью.

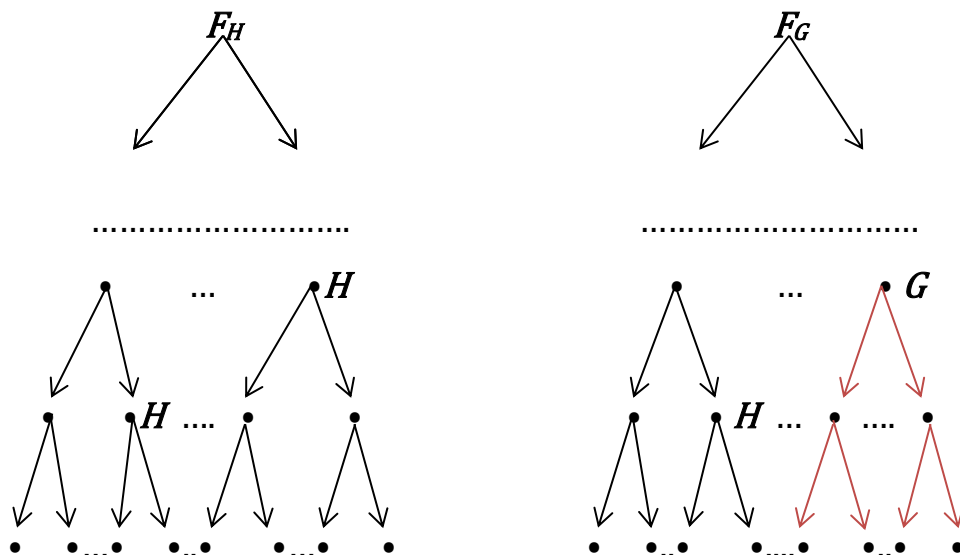
Теорема о подстановке свидетельствует о том, что любой из перечисленных ранее основных законов АВ нужно рассматривать с точностью до обозначений (в них вместо переменных могут использоваться абсолютно произвольные формулы АВ) или как некоторые правила действий. Например, закон de Morgan'a $\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}$ нужно понимать как правило отрицания дизъюнкции – «отрицание дизъюнкции некоторых формул равно конъюнкции отрицаний этих формул».

Теорема 3.3. (о замене). Если в некоторой формуле F_H , содержащей подформулу H , эту подформулу H (всюду или частично, где эта подформула встречается в F_H) заменить на равносильную ей формулу G , то полученная в результате такой замены новая формула F_G будет равносильна исходной формуле F_H . Иначе:

$$(F = F_H \wedge H \lesssim F_H \wedge H = G) \Rightarrow (F_H = F_G).$$

Доказательство. Построим дерево подформул D_H для F_H и выделим в нем те вершины, которые являются корневыми для поддеревьев, соответствующих подформуле H (см. пример 2.1). Аналогичным

образом построим дерево подформул D_G для формулы F_G и выделим в нем вершины, которые являются корневыми для поддеревьев, соответствующих подформулам H и G . Сравним эти деревья.



Ясно, что эти деревья различаются только поддеревьями с соответствующими корневыми вершинами H и G . Выберем произвольную пропозициональную интерпретацию $\tilde{\alpha}$ и припишем атомарным подформулам обоих деревьев соответствующие значения, подставив их в вершины деревьев на самый нижний уровень (вместо «листьев»). Затем, двигаясь по ветвям деревьев снизу вверх, подсчитаем значения каждой из подформул, используя определения операций. Заметим еще, что значение каждой подформулы в каждой вершине деревьев на каждом ярусе *однозначно определяются* значениями подформул последующего яруса и операцией, используемой для выделения подформул этого яруса (см. пример 2.2). Все подформулы совпадающей части деревьев (по цепям, не проходящим через вершину G дерева D_G и соответствующую ей вершину H дерева D_H) принимают, очевидно, одни и те же значения. В различающихся вершинах H и G значения также будут одинаковыми в силу $H = G$. Следовательно, значения подформул в вершинах цепей,

соединяющих корни деревьев F_H и F_G с соответствующими вершинами H и G , также будут одинаковыми. В частности, одинаковыми будут и значения в вершинах F_H и F_G . Таким образом:

$(\forall \tilde{\alpha} \in B^n) [F_H(\tilde{\alpha}) = F_G(\tilde{\alpha})]$ т.е. $F_H = F_G$, что и требовалось доказать.

Теоремы о подстановке и о замене являются основой метода тождественных преобразований формул АВ (равно как подобные теоремы лежат в основе метода тождественных преобразований формул обычной алгебры).

Пример 3.1. Преобразовать формулу

$$f(x, y, z) = (\overline{xy} \leftrightarrow (x \vee z \rightarrow \overline{y})) \rightarrow \overline{\overline{\overline{xy \vee z}}}$$

к такой, в которой отсутствуют небулевы операции (импликация, эквиваленция и их отрицания); все знаки отрицания находятся над переменными и нет лишних знаков отрицания; отсутствуют скобки.

Решение. Преобразования формулы можно выполнять хаотически, но лучше их проводить последовательно, отправляясь каждый раз от последней операции подформулы. Имеем:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (\overline{xy} \leftrightarrow (x \vee z \rightarrow \overline{y})) \rightarrow \overline{\overline{\overline{xy \vee z}}} = [\text{воспользуемся законом} \\ A \rightarrow B &= \overline{A} \vee B] = \overline{\overline{\overline{xy \leftrightarrow (x \vee z \rightarrow \overline{y}) \vee xy \vee z}}} = [\text{воспользуемся законами} \\ \overline{A \leftrightarrow B} &= \overline{AB} \vee \overline{A\overline{B}}, \quad \overline{A\overline{B}} = \overline{A} \vee \overline{B}, \quad (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C] = \\ \overline{\overline{\overline{xy(x \vee z \rightarrow \overline{y}) \vee xy(x \vee z \rightarrow \overline{y}) \vee \overline{xy \vee z}}}} &= [\text{применим законы} \\ \overline{\overline{A}} &= A, \overline{\overline{A \rightarrow B}} = \overline{A\overline{B}}, A \rightarrow B = \overline{A} \vee B \text{ и ассоциативные законы для} \\ \text{конъюнкции и дизъюнкции}] &= (\overline{x \vee y})(\overline{x \vee z \vee \overline{y}}) \vee \overline{xy(x \vee z)} \vee \overline{\overline{x \vee y \vee z}} \\ &= [\text{учтем законы двойного отрицания, коммутативность конъюнкции} \\ \text{и законы de Morgan'a}] &= (\overline{x \vee y})(\overline{x \vee z \vee \overline{y}}) \vee \overline{xy(x \vee z)} \vee \overline{\overline{x \vee y \vee z}} = \\ &= [\text{применим закон противоречия}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \bar{z} \vee \bar{y}) \vee x0(x \vee z) \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = [\text{воспользуемся законами} \\
&\text{постоянных}] = \\
&(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \bar{z} \vee \bar{y}) \vee 0 \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = [\text{воспользуемся законами постоянных}] \\
&= (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \bar{z} \vee \bar{y}) \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = [\text{применим первый дистрибутивный} \\
&\text{закон и коммутативный закон для конъюнкции}] = \\
&\bar{x} \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = [\text{учтем закон идемпотентности} \\
&\text{конъюнкции и закон противоречия}] \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee 0 \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \\
&[\text{применим законы постоянных}] = \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}.
\end{aligned}$$

Результат получен, но его можно упростить на основании закона поглощения $A \vee AB = A$. Тогда получим $f(x, y, z) = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$.

Ответ: $f(x, y, z) = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$.

4. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ)

Определение 4.1. (степень в логике).

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \text{при } \alpha = 1; \\ \bar{x}, & \text{при } \alpha = 0. \end{cases}$$

Из определения непосредственно вытекают следующие свойства степеней:

$$x^\alpha = 1 \Leftrightarrow x = \alpha; \quad x^\alpha = 0 \Leftrightarrow x = \bar{\alpha}.$$

Определение 4.2. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – список переменных. Тогда

формула вида $x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \cdots x_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$, где $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$;

$\forall p : \alpha_p \in B = \{0, 1\}; x_j \neq x_m$ при $j \neq m$, называется **элементарной**

конъюнкцией (ЭК) относительно данного списка переменных. Таким образом, ЭК относительно данного списка переменных – это произвольная конъюнкция степеней этих переменных, в которую

каждая переменная входит не более одного раза. Пустая ЭК считается равной 0.

Замечание 4.1. На практике элементарные конъюнкции выписываются с использованием определения степени без указания показателей степеней, а применяя, где это необходимо, отрицания.

Определение 4.3. Произвольная дизъюнкция различных элементарных конъюнкций относительно данного списка переменных (или константа «0», как пустая дизъюнкция) называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) относительно исходного списка переменных. Таким образом:

$$\text{ДНФ}(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee_i \text{ЭК}_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $\text{ЭК}_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \text{ЭК}_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при $i \neq j$.

Определение 4.4. ДНФ, равносильная некоторой формуле f , называется ДНФ этой формулы и обозначается $\text{ДНФ}(f)$. Таким образом:

$$\text{ДНФ} = f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{ДНФ} = \text{ДНФ}(f)$$

Теорема 4.1. (существования ДНФ (f)).

Для всякой формулы алгебры высказываний существует ее ДНФ. Т.е.:

$$(\forall f \in \Phi_{AB})(\exists \text{ДНФ} \in \Phi_{AB})[\text{ДНФ} = \text{ДНФ}(f)]$$

Доказательство. (конструктивное). Укажем алгоритм построения $\text{ДНФ}(f)$. Для того, чтобы произвольную формулу привести к виду ДНФ (построить ДНФ этой формулы) достаточно выполнить в указанном порядке следующие преобразования:

1. Избавиться в формуле от небулевых операций $\rightarrow, \leftrightarrow, +$ и их отрицаний на основании законов:

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y; \quad \overline{x \rightarrow y} = x \bar{y};$$

$$x \leftrightarrow y = \bar{x} \bar{y} \vee xy = \overline{x \oplus y}; \quad \overline{x \leftrightarrow y} = \bar{x}y \vee x\bar{y} = x \oplus y;$$

2. Перенести знаки отрицания на буквы на основании законов де Моргана

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}; \quad \overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y};$$

3. Избавиться от лишних знаков отрицания на основании закона двойного отрицания.

$$\overline{\bar{x}} = x;$$

4. Раскрыть все скобки на основании первого (I) и второго (II) дистрибутивных законов

$$x(y \vee z) = xy \vee xz \text{ (I);} \quad (x \vee y)(x \vee z) = x \vee yz \text{ (II);}$$

5. Упростить формулу на основании законов

– идемпотентности: $x \vee x = x; \quad xx = x;$

– традиционной логики: $x\bar{x} = 0; \quad x \vee \bar{x} = 1;$

– постоянных: $x0 = 0; \quad x1 = x; \quad x \vee 0 = x; \quad x \vee 1 = 1;$

В результате получим некоторую (возможно пустую) дизъюнкцию различных элементарных конъюнкций, равносильную исходной формуле, т.е. ДНФ исходной формулы. Если результатом является константа 1, то $1 = \bar{x} \vee x = \text{ДНФ}(1)$.

Пример 4.1. Найти ДНФ(f) для

$$f(x, y, z) = (\bar{x}\bar{y} \leftrightarrow (x \vee z \rightarrow \bar{y})) \rightarrow \overline{\overline{\overline{x(y \vee z)}}}.$$

Решение. Мы уже по сути строили ДНФ этой формулы в примере 3.1. Имеем:

$$f(x, y, z) = (\bar{x}\bar{y} \leftrightarrow (x \vee z \rightarrow \bar{y})) \rightarrow \overline{\overline{\overline{x(y \vee z)}}} = \overline{\overline{\overline{\bar{x}\bar{y} \leftrightarrow (x \vee z \rightarrow \bar{y}) \vee x(y \vee z)}}} =$$

$$\begin{aligned}
& \overline{\overline{\overline{xy(x \vee z \rightarrow y) \vee xy(x \vee z \rightarrow y) \vee x \vee (y \vee z)}}}} = \\
& (\overline{\overline{\overline{(x \vee y)(x \vee z \vee y) \vee xy(x \vee z) \vee x \vee y \vee z}}}} = \\
& (\overline{\overline{\overline{(x \vee y)(x \vee z \vee y) \vee xy(x \vee z) \vee x \vee y \vee z}}}} = (\overline{\overline{\overline{(x \vee y)(x \vee z \vee y) \vee x0(x \vee z) \vee x \vee y \vee z}}}} \\
& = (\overline{\overline{\overline{(x \vee y)(x \vee z \vee y) \vee 0 \vee x \vee y \vee z}}}} = (\overline{\overline{\overline{(x \vee y)(x \vee z \vee y) \vee x \vee y \vee z}}}} = \\
& \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{xxz \vee xy \vee xyz \vee yu \vee x \vee y \vee z}}}}}} = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{xz \vee xy \vee xyz \vee 0 \vee x \vee y \vee z}}}}}} = \\
& \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{xz \vee xy \vee xyz \vee x \vee y \vee z}}}}}} = \text{ДНФ}_1(f).
\end{aligned}$$

Ответ: $\text{ДНФ}_1(f) = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{xz \vee xy \vee xyz \vee x \vee y \vee z}}}}}}$.

Замечание 4.2. В рассмотренном примере построения $\text{ДНФ}(f)$ мы не придерживались жестко отмеченным при доказательстве теоремы шагам алгоритма, а вели преобразования формулы на каждом шаге, отправляясь от последних операций в каждом дизъюнктивном слагаемом этой формулы с использованием возможных для данного шага упрощений формулы. Придерживаясь подобной схемы, можно во многих случаях упростить процесс построения $\text{ДНФ}(f)$.

Замечание 4.3. Процесс построения $\text{ДНФ}(f)$ в рассмотренном примере можно продолжить. Тогда получим:

$$\text{ДНФ}_2(f) = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{xz \vee xy \vee x \vee y \vee z}}}}}} \text{ (учли закон поглощения}$$

$$\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{xz \vee xyz} = \overline{\overline{\overline{xz}}}}}}}});$$

$$\text{ДНФ}_3(f) = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{xy \vee x \vee y \vee z}}}}}} \text{ (учли закон поглощения } \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{xz \vee x} = \overline{\overline{\overline{x}}}}}}}});$$

$$\text{ДНФ}_4(f) = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x \vee y \vee z}}}}}} \text{ (аналогично предыдущему).}$$

Таким образом, $\text{ДНФ}(f)$ для данной формулы f определяется неоднозначно.

Пример 4.2. Найти $\text{ДНФ}(f)$ для

$$f(x, y, z) = (x \vee \bar{z} \rightarrow \bar{y}) \leftrightarrow (\bar{x} + yz) \rightarrow x\bar{y} \vee z.$$

Решение. Будем следовать приведенным выше рекомендациям. В исходной формуле последней операцией является эквиваленция, а потому имеем:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x \vee \bar{z} \rightarrow \bar{y} \leftrightarrow (\bar{x} + yz) \rightarrow x\bar{y} \vee z = \\ &= \overline{x \vee \bar{z} \rightarrow \bar{y}} \overline{(\bar{x} + yz) \rightarrow x\bar{y} \vee z} \vee (x \vee \bar{z} \rightarrow \bar{y})((\bar{x} + yz) \rightarrow x\bar{y} \vee z) = \end{aligned}$$

Далее, учитывая порядок выполнения операций в каждой скобке последней формулы, получим:

$$\begin{aligned} &= (x \vee \bar{z})\bar{y}(\bar{x} + yz)x\bar{y} \vee z \vee (x \vee \bar{z} \vee \bar{y})(\bar{x} + yz \vee x\bar{y} \vee z) = \\ &= (x \vee \bar{z})y(\overline{xyz \vee x\bar{y}z})x\bar{y} \vee z \vee (\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee yz \vee x\bar{y} \vee z) = \\ &= (x \vee \bar{z})y(\overline{xyz \vee x(\bar{y} \vee \bar{z})})(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \vee (\bar{x} \vee \bar{y})(x(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee x\bar{y} \vee z) = \\ &= (x \vee \bar{z})(\overline{xyyz \vee xy\bar{y}z \vee xy\bar{z}z})(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \vee (\bar{x} \vee \bar{y})(x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee x\bar{y} \vee z) = \end{aligned}$$

Учтем законы идемпотентности, традиционной логики, постоянных, поглощения. Получим:

$$(xyz \vee xy\bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \vee (\bar{x} \vee \bar{y})(x\bar{z} \vee x\bar{y} \vee z) =$$

Раскроем последовательно все скобки на основании дистрибутивных законов. Получим:

$$\begin{aligned} &= (xyz\bar{z} \vee xy\bar{z}\bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (x\bar{x}\bar{z}\bar{z} \vee xxy\bar{z}\bar{z} \vee xx\bar{y}z \vee x\bar{z}z \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{y}z \vee xy\bar{y} \vee yz) \\ &= (0 \vee xy\bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (0 \vee xy\bar{z} \vee 0\bar{y}z \vee x\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee x0z \vee xy \vee yz) = \\ &= xy\bar{z}(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee xy\bar{z} \vee x\bar{z} \vee xy \vee yz = \end{aligned}$$

Вспоминая законы поглощения, имеем:

$$\bar{x}y\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee x\bar{z} \vee xy \vee yz = \text{ДНФ}_1(f) =$$

Первые два слагаемых в ДНФ₁(f) можно «склеить» по переменной «z». Тогда получим:

$$\bar{x}y \vee \bar{x}z \vee x\bar{y} \vee yz = \text{ДНФ}_2(f).$$

Ответ: ДНФ₁(f) = $\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{z} \vee x\bar{y} \vee yz$; ДНФ₂(f) = $\bar{x}y \vee \bar{x}z \vee x\bar{y} \vee yz$

Теорема 4.2. Область истинности произвольной дизъюнкции некоторых формул равна объединению областей истинности этих формул, т.е.:

$$ОИ(\bigvee_{i \in I; k} f_i) = \bigcup_{i \in I; k} ОИ(f_i)$$

Доказательство. Утверждение теоремы сразу следует из свойств операции дизъюнкции – дизъюнкция равна единице (истинна), тогда и только тогда, когда равно единице (истинно) хотя бы одно ее дизъюнктивное слагаемое.

Последняя теорема дает возможность строить таблицы формул по их ДНФ.

Пример 4.3. Построить таблицу формулы, не используя таблиц Квайна, для

$$f(x, y, z) = (x \vee \bar{z} \rightarrow \bar{y}) \leftrightarrow (\bar{x} + yz) \rightarrow x\bar{y} \vee z.$$

Решение. Для построения таблицы формулы достаточно знать ее область истинности (ОИ) или область ложности (ОЛ). Область истинности формулы можно получить на основании ее ДНФ. Воспользуемся результатами примера 4.2. Получим:

$$f(x, y, z) = x \vee \bar{z} \rightarrow \bar{y} \leftrightarrow (\bar{x} + yz) \rightarrow x\bar{y} \vee z = \dots = \bar{x}y \vee \bar{x}z \vee x\bar{y} \vee yz.$$

Тогда:

$$ОИ(f) = ОИ(\bar{x}y) \cup ОИ(\bar{x}z) \cup ОИ(x\bar{y}) \cup ОИ(yz).$$

Имеем:

$$ОИ(\bar{x}y) = \{(01\alpha) \mid \alpha \in B = \{0;1\}\} = \{(010), (011)\} = \{2;3\},$$

$$ОИ(\bar{x}z) = \{(0\alpha 1) \mid \alpha \in B = \{0;1\}\} = \{(001); (011)\} = \{1;3\},$$

$$\text{ОИ}(\overline{xy}) = \{(10\alpha) \mid \alpha \in B = \{0;1\}\} = \{(100); (101)\} = \{4;5\},$$

$$\text{ОИ}(\overline{yz}) = \{(\alpha 01) \mid \alpha \in B = \{0;1\}\} = \{(001); (101)\} = \{1;5\}.$$

Таким образом:

$$\text{ОИ}(f) = \{1;2;3;4;5\}$$

(ОИ задана «номерами» наборов) и, следовательно: $f: 01111100$.

Ответ: $f: 01111100$.

Рассмотренный выше пример свидетельствует о том, что *всякая непустая ДНФ является формулой выполнимой*.

Теорема 4.3. (критерий тождественной истинности по ДНФ)

$$F \in \text{ТИ (или } F=1) \Leftrightarrow \text{ДНФ}(\overline{F}) = 0.$$

Доказательство.

а) Необходимость. $F \in \text{ТИ (или } F=1) \Rightarrow \text{ДНФ}(\overline{F}) = 0.$

Имеем. Поскольку $F \in \text{ТИ}$, то $\overline{F} = 0$ и, следовательно, процесс построения ДНФ для \overline{F} не может закончиться непустой ДНФ (ибо в этом случае \overline{F} была бы выполнимой, что противоречило бы тому, что $\overline{F} = 0$). Значит, $\text{ДНФ}(\overline{F})$ пустая, т.е. $\text{ДНФ}(\overline{F}) = 0$ и, тем самым, необходимость доказана.

б) Достаточность.

$$\text{ДНФ}(\overline{F}) = 0 \Rightarrow F \in \text{ТИ (или } F=1).$$

Имеем. Поскольку $\text{ДНФ}(\overline{F}) = 0$ и $\overline{F} = \text{ДНФ}(\overline{F})$, то $\overline{F} = 0$. Откуда $F = 1$ (т.е. $F \in \text{ТИ}$) и достаточность доказана.

Теорема 4.4. (критерий тождественной ложности по ДНФ)

$$F = 0 \Leftrightarrow \text{ДНФ}(F) = 0.$$

Доказательство. (Доказать самостоятельно).

5. Логическое следствие в АВ, свойства, критерий

При анализе рассуждений существенное значение имеет понятие логического следствия. Определим его.

Определение 5.1. Формула F называется логическим следствием формул A_1, A_2, \dots, A_n , если в любой пропозициональной интерпретации, в которой все формулы A_1, A_2, \dots, A_n истинны, F также истинна (обозначение $A_1, A_2, \dots, A_n \models F$). Т.о.

$$(A_1, A_2, \dots, A_n \models F) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \tilde{\alpha} \in B^n) [(\forall i \in \{1, \dots, n\}: A_i(\tilde{\alpha}) = 1) \Rightarrow (F(\tilde{\alpha}) = 1)]$$

Если учесть, что $\forall i \in \{1, \dots, n\}: A_i(\tilde{\alpha}) = 1$ равносильно $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n)(\tilde{\alpha}) = 1$, то определение логического следствия можно дать в другой, эквивалентной предыдущему определению, форме

Определение 5.2. Формула F называется логическим следствием формул A_1, A_2, \dots, A_n , если $OИ(A_1 A_2 \dots A_n) \subseteq OИ(F)$.

Из второго определения сразу следуют очевидные свойства логического следствия.

1) Поскольку $\forall F \in \Phi_{AB}: OИ(F) \subseteq B^n$, то $\forall F \in \Phi_{AB}: F \models 1$ (истина может следовать из всего, что угодно);

2) Поскольку $\forall M: \emptyset \subseteq M$, то $\forall B \in \Phi_{AB}: \emptyset \models B$ (из лжи может следовать все, что угодно).

3) $\forall i \in \{1, \dots, n\}: (A_1, A_2, \dots, A_n \models A_i)$ (из данной совокупности посылок логически следует любая из этих посылок).

Практическую проверку того является или нет заданная формула логическим следствием заданной совокупности посылок можно на основании определения с помощью таблицы Квайна, в которой имеется столбец для конъюнкции посылок $A_1 A_2 \dots A_n$ и столбец для заключения B . Однако, такой метод может стать неэффективным, если переменных в формулах или посылок данного рассуждения много.

Аналитически проверку логического следствия осуществляют на основании следующего критерия логического следствия.

Теорема 5.1. (критерий логического следствия).

$$(A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B) \Leftrightarrow (\vDash (A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B))$$

(формула B логически следует из совокупности посылок A_1, A_2, \dots, A_n тогда и только тогда, когда соответствующая импликация $A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B$ является тождественно истинной).

Доказательство.

а) **Необходимость.** Нужно доказать $(A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B) \Rightarrow (\vDash (A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B))$.

Имеем:

$$\begin{aligned} (A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B) &\Leftrightarrow ОИ(A_1 A_2 \dots A_n) \subseteq ОИ(B) \Leftrightarrow \\ (\forall \tilde{\alpha} \in ОИ(A_1 A_2 \dots A_n)) [(A_1 A_2 \dots A_n)(\tilde{\alpha})=1 &\Rightarrow (B(\tilde{\alpha})=1)] \Leftrightarrow \\ \forall \tilde{\alpha} \in ОИ(A_1 A_2 \dots A_n) [(A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B)(\tilde{\alpha})=1] & \end{aligned}$$

Кроме того:

$$\forall \tilde{\alpha} \notin ОИ(A_1 A_2 \dots A_n) [(A_1 A_2 \dots A_n)(\tilde{\alpha})=0] \Rightarrow \forall \tilde{\alpha} \notin ОИ(A_1 A_2 \dots A_n) [(A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B)(\tilde{\alpha})=1];$$

В итоге:

$$(\forall \tilde{\alpha} \in B^n) [(A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B)(\tilde{\alpha})=1]$$

и, следовательно, $\vDash (A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B)$. Необходимость доказана.

б) **Достаточность.** Нужно доказать $(\vDash (A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B)) \Rightarrow (A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B)$.

Доказательство проводится в порядке, обратном доказательству необходимости теоремы.

$$\begin{aligned} (\vDash (A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B)) &\Leftrightarrow (\forall \tilde{\alpha} \in B^n) [(A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B)(\tilde{\alpha})=1] \Rightarrow \\ \forall \tilde{\alpha} \in ОИ(A_1 A_2 \dots A_n) [(A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B)(\tilde{\alpha})=1] &\Leftrightarrow \\ (\forall \tilde{\alpha} \in ОИ(A_1 A_2 \dots A_n)) [(A_1 A_2 \dots A_n)(\tilde{\alpha})=1 &\Rightarrow (B(\tilde{\alpha})=1)] \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$ОИ(A_1 A_2 \dots A_n) \subseteq ОИ(B) \Leftrightarrow (A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B)$$

и достаточность доказана.

Доказанные критерии логического следствия и тождественной истинности (по ДНФ) дают возможность указать практическую схему аналитической проверки логического следования, а именно

$$(A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B) \Leftrightarrow (\vDash (A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B)) \Leftrightarrow (\overline{ДНФ(A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B)} = 0).$$

Пример 5.1. Верно ли $A \rightarrow (B \leftrightarrow C), \bar{A} \vee C(\bar{C} \vee B) \vDash A$? Имеем:

$$\begin{aligned} & (A \rightarrow (B \leftrightarrow C), \bar{A} \vee C(\bar{C} \vee B) \vDash A) \Leftrightarrow \\ & (\vDash (A \rightarrow (B \leftrightarrow C))(\bar{A} \vee C(\bar{C} \vee B)) \rightarrow A) \Leftrightarrow \\ & \overline{(A \rightarrow (B \leftrightarrow C))(\bar{A} \vee C(\bar{C} \vee B)) \rightarrow A} = 0. \end{aligned}$$

Построим ДНФ для $\overline{(A \rightarrow (B \leftrightarrow C))(\bar{A} \vee C(\bar{C} \vee B)) \rightarrow A}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \overline{(A \rightarrow (B \leftrightarrow C))(\bar{A} \vee C(\bar{C} \vee B)) \rightarrow A} &= (A \rightarrow (B \leftrightarrow C))(\bar{A} \vee C(\bar{C} \vee B))\bar{A} = \\ &= (\bar{A} \vee \bar{B}\bar{C} \vee BC)(\bar{A} \vee C\bar{C} \vee BC)\bar{A} = \bar{A} \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение $(A \rightarrow (B \leftrightarrow C), \bar{A} \vee C(\bar{C} \vee B) \vDash A)$ неверное.

Теорема 5.2. (правило перестановки посылок).

$$(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n \vDash B) \Leftrightarrow (A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n \vDash B)$$

(порядок перечисления посылок в рассуждениях несущественен).

Доказательство. $(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n \vDash B) \Leftrightarrow$

$$ОИ(A_1 A_2 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) \subseteq ОИ(B) \Leftrightarrow ОИ(A_1 A_2 \dots A_j \dots A_i \dots A_n) \subseteq ОИ(B) \Leftrightarrow$$

$$(A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n \vDash B).$$

Теорема 5.3. (закон контрапозиции).

$$(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n \vDash B) \Leftrightarrow (A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, \bar{B} \vDash \bar{A})$$

Доказательство.

$$(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n \vDash B) \Leftrightarrow (\vDash (A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n \rightarrow B)) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} (\overline{A_1 A_2 \cdots A_n \rightarrow B} = 0) &\Leftrightarrow (A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n \bar{B} = 0) \Leftrightarrow (A_1 A_2 \cdots A_{n-1} \bar{B} A_n = 0) \Leftrightarrow \\ &\overline{(A_1 A_2 \cdots A_{n-1} \bar{B} \rightarrow \bar{A}_n = 0)} \Leftrightarrow (\vDash (A_1 A_2 \cdots A_{n-1} \bar{B} \rightarrow \bar{A}_n)) \Leftrightarrow \\ &(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, \bar{B} \vDash \bar{A}_n). \end{aligned}$$

Закон контрапозиции лежит в основе всех без исключения доказательств методом «от противного». Простейшим вариантом этого закона является

$$(A \vDash B) \Leftrightarrow (\bar{B} \vDash \bar{A}) \text{ или } (\vDash (A \rightarrow B)) \Leftrightarrow (\vDash (\bar{B} \rightarrow \bar{A})),$$

что часто используется при доказательстве теорем (вместо доказательства прямой теоремы доказывается ее контрапозиция).

Теорема 5.4. (правило дедукции).

$$(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n \vDash B) \Leftrightarrow (A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vDash (A_n \rightarrow B)).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n \vDash B) &\Leftrightarrow (\vDash (A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n \rightarrow B)) \Leftrightarrow \\ &\overline{(A_1 A_2 \cdots A_n \rightarrow B = 0)} \Leftrightarrow (A_1 A_2 \cdots A_n \bar{B} = 0) \Leftrightarrow (A_1 A_2 \cdots A_{n-1} \overline{A_n \rightarrow B}) \Leftrightarrow \\ &\overline{(A_1 A_2 \cdots A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow B) = 0)} \Leftrightarrow \vDash (A_1 A_2 \cdots A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow B)) \Leftrightarrow \\ &(A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vDash (A_n \rightarrow B)). \end{aligned}$$

На практике применение правила дедукции чаще всего заключается в переходе от $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vDash (A_n \rightarrow B))$ к $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n \vDash B)$. Такой переход увеличивает количество посылок (аргументов) рассуждения, упрощает структуру заключения рассуждения и, тем самым, упрощает обоснование заключения в процессе рассуждения.

Теорема 5.5. (транзитивность логического следствия).

$$(\forall i \in \{1, \dots, m\}): A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B_i \wedge (B_1, B_2, \dots, B_m \vDash F) \Rightarrow (A_1, A_2, \dots, A_n \vDash F).$$

Доказательство.

$$(\forall i \in \{1, \dots, m\}): A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B_i \Rightarrow$$

$$(\forall i \in \{1, \dots, m\}): ОИ(A_1 A_2 \dots A_n) \subseteq ОИ(B_i) \Rightarrow$$

$$ОИ(A_1 A_2 \dots A_n) \subseteq \bigcap_{i=1}^m ОИ(B_i) \Rightarrow ОИ(A_1 A_2 \dots A_n) \subseteq ОИ(B_1 B_2 \dots B_m);$$

$$(B_1, B_2, \dots, B_m \vDash F) \Rightarrow ОИ(B_1 B_2 \dots B_m) \subseteq ОИ(F),$$

а потому: $ОИ(A_1 A_2 \dots A_n) \subseteq ОИ(B_1 B_2 \dots B_m) \subseteq ОИ(F)$, откуда

$ОИ(A_1 A_2 \dots A_n) \subseteq ОИ(F)$, т.е. $(A_1, A_2, \dots, A_n \vDash F)$, что и требовалось доказать.

Транзитивность логического следствия позволяет сложные рассуждения разбивать на более простые и строить цепочку рассуждений, позволяющую получать итоговое заключение, исходя из начальной совокупности посылок.

6. Рассуждения в АВ, проверка их правильности

Как уже отмечалось ранее, логика – это наука о правильных формах рассуждений. Рассуждения бывают дедуктивными и индуктивными. Дедуктивное рассуждение (умозаключение) – это процедура обоснования некоторого высказывания из совокупности других высказываний. Простейшим видом дедуктивного рассуждения является непосредственный переход от одного или нескольких высказываний A_1, A_2, \dots, A_n (посылок рассуждения) к высказыванию B (заключению рассуждения). Такое рассуждение считается правильным, если заключение является логическим следствием посылок. Всякое дедуктивное рассуждение имеет некоторую совокупность посылок и заключение рассуждения, т.е. имеет некоторую дедуктивную схему рассуждения. В дальнейшем схемы рассуждений будем представлять в виде

$$\frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{B},$$

где A_1, A_2, \dots, A_n - посылки рассуждения, а B - заключение.

Итак, рассуждение считается правильным, если оно осуществляется по правильной схеме. Схема рассуждения считается правильной, если заключение (нижняя формула схемы) является логическим следствием посылок (верхних формул схемы). Таким образом, можно указать общую схему проверки правильности рассуждений:

Рассуждение правильное \Leftrightarrow схема рассуждения $\frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{B}$ - правильная $\Leftrightarrow A_1, A_2, \dots, A_n \models B \Leftrightarrow \models (A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B) \Leftrightarrow$
 $(\text{ДНФ}(\overline{A_1 A_2 \dots A_n} \rightarrow B) = 0).$

Пример 6.1. (парадокс Зенона (см.[4])

Проанализируйте рассуждение древнегреческого математика Зенона:

Если тело движется, то имеется две возможности: или движение происходит в том месте, где тело находится, или оно происходит там, где тела нет. Но движение не может происходить там, где тело находится (ибо тогда тело не могло бы уже там находиться). Очевидно, что оно не может происходить и там, где тела нет (потому что там нет тела – самого объекта движения). Значит, никакое тело не может двигаться.

Решение. Формализуем рассуждение. Введем атомарные высказывания:

A: - «Тело может двигаться»;

B: - «Движение происходит там, где тело находится»;

C: - «Движение происходит там, где тела нет».

Тогда схема рассуждения Зенона следующая: $\frac{A \rightarrow B + C, \bar{B}, \bar{C}}{\bar{A}}$

(здесь «+» - исключающее «или» (отрицание эквиваленции)). Составим соответствующую импликацию и проверим ее тождественную истинность на основании критерия ТИ по ДНФ. Имеем:

$$\overline{(A \rightarrow B + C)\bar{B}\bar{C}} \rightarrow \bar{A} = (A \rightarrow (B + C))\bar{B}\bar{C}A = (\bar{A} \vee \bar{B}C \vee B\bar{C})\bar{B}\bar{C}A = 0$$

Таким образом, исследуемая импликация является тождественно истинной. Следовательно, схема рассуждения правильная, а это значит, что рассуждение Зенона – верное.

Замечание 6.1. *Пример 6.1. показывает, что правильность рассуждения никак не гарантирует правильности заключения этого рассуждения. Заключениям правильных рассуждений можно доверять, если есть уверенность в истинности посылок рассуждения и в том, что в основу рассуждения (совокупность посылок) положены все существенные факты.*

Пример 6.2. (см. [4]).

В сентябре 1893г. в Северном Ледовитом океане к северу от Новосибирских островов, затертый со всех сторон тяжелыми льдами, дрейфовал корабль «Фрам». Начальник экспедиции на «Фраме» известный полярный исследователь Фритьоф Нансен пытался открыть знаменитую землю, которую видел еще в 1810 году русский промышленник Яков Санников. Нансен не видел Земли Санникова, но он заключил о ее существовании на основе следующих соображений.

Чем дальше продвигалась экспедиция на север, тем меньше становились глубины океана. Это обстоятельство отмечено было в этом районе еще раньше Нансена. Известно же, что если вблизи остров или материк, то глубины уменьшаются.

Участники экспедиции неоднократно замечали большие стаи птиц – гаг, чибисов и других, летящих к северу. Ясно, что птицы могли лететь к северу только в том случае, если там есть земля.

Кроме того, неподалеку от корабля находили многочисленные следы сухопутных животных – песцов. Если бы вблизи корабля не было земли, то и следов сухопутных животных не было бы.

Проанализируйте рассуждение Нансена и правомочность его заключения.

Решение. Формализуем рассуждение. Рассмотрим следующие атомарные высказывания:

A: - «Земля близко»;

B: - «Глубины океана уменьшались»;

C: - «Замечали стаи птиц, летящих к северу»;

D: - «Наблюдали следы сухопутных животных».

E: - «Экспедиция продвигалась на север».

тогда схема рассуждения имеет вид:

$$\frac{E, B, A \rightarrow B, C, C \rightarrow A, D, \bar{A} \rightarrow \bar{D}}{A}.$$

Проверим правильность этой схемы. Имеем:

$$\begin{aligned} \overline{EB(A \rightarrow B)C(C \rightarrow A)D(\bar{A} \rightarrow \bar{D}) \rightarrow A} &= EB(\bar{A} \vee B)C(\bar{C} \vee A)D(A \vee \bar{D})\bar{A} = \\ &= \bar{A}BCDE(A \vee \bar{C} \bar{D}) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, схема рассуждения, а, значит, и само рассуждение правильные. Однако, ничего, кроме торосов, путешественники в районе Земли Санникова не обнаружили. В чем же дело?

Во-первых, неправомочно использовалась посылка $A \rightarrow B$. По смыслу рассуждения следовало бы использовать $B \rightarrow A$ (если глубины уменьшаются, то земля близко, что неверно). Таким образом, в рассуждении произошла подмена аргумента. Во-вторых, посылка $C \rightarrow A$

неверная – птиц наблюдали в дневное время и они могли лететь к северу в поисках открытых ото льда участков океана на кормление, а не на землю. Поэтому оправданнее было бы использовать посылку $A \rightarrow C$ (которая, впрочем, тоже неверная). Если же исключить из рассуждения посылки, связанные с птицами, то схема рассуждения имела бы вид:

$$\frac{E, B, A \rightarrow B, D, \bar{A} \rightarrow \bar{D}}{A},$$

и, в силу

$$\begin{aligned} \overline{EB(A \rightarrow B)D(\bar{A} \rightarrow \bar{D})} \rightarrow A &= EB(\bar{A} \vee B)D(A \vee \bar{D})\bar{A} = \\ &= \bar{A}BDE(AB \vee \bar{A}\bar{D} \vee B\bar{D}) = 0, \end{aligned}$$

рассуждение оставалось бы верным. Заключение такого рассуждения («земля близко») было бы истинным, но свидетельствовало бы оно не о существовании Земли Санникова, а о близости расположенных южнее корабля Новосибирских островов.

В рассуждении Нансена по сути трижды обосновывался факт «Земля близко» с использованием следующих схем:

$$\frac{B, A \rightarrow B}{A}, \quad \frac{C, C \rightarrow A}{A}, \quad \frac{D, \bar{A} \rightarrow \bar{D}}{A}.$$

Первая из них не является правильной, т.к. A не следует логически из посылок B и $A \rightarrow B$, а остальные две – правильные. Правильность двух последних схем и привела к тому, что рассуждение Нансена в итоге оказалось правильным.

В силу определения логического следствия ясно, что из одной и той же совокупности посылок можно получить много следствий. Наиболее слабым следствием любой заданной совокупности посылок является тавтология (тождественно истинная формула), поскольку

такая формула логически следует *из любой* совокупности посылок. В этом смысле наиболее сильным следствием данной совокупности посылок является конъюнкция этих посылок. Этот факт часто используется в задачах, в которых посылки (аргументы) известны, а заключение – неизвестно или не сформулировано.

Пример 6.3. (см. [5]) (Задача Кислера).

Браун, Джонс и Смит обвиняются в преступлении. На допросе они под присягой дали показания:

Браун: *Джонс виновен, а Смит невиновен* ($D\bar{C}$);

Джонс: *Браун без помощи Смита это не смог бы сделать* ($B \rightarrow C$);

Смит: *Я невиновен, но кто-то из них виновен* ($\bar{C}(B \vee D)$).

В силу сказанного выше наиболее сильным следствием приведенных фактов является их конъюнкция. Построим ее и приведем к виду ДНФ. Имеем:

$$D\bar{C}(B \rightarrow C)\bar{C}(B \vee D) = D\bar{C}(\bar{B} \vee C)(B \vee D) = \bar{B}\bar{C}D.$$

Таким образом, виновен Джонс.

Однако задумаемся, можем ли мы доверять подозреваемым? Можем ли считать приведенные посылки истинными? Что, если виновный лжет, а невиновный говорит правду? В этом случае необходимо построение наиболее сильного следствия шести посылок:

$$\begin{aligned} & (\bar{B} \rightarrow D\bar{C})(B \rightarrow \overline{D\bar{C}})(\bar{D} \rightarrow (B \rightarrow C))(D \rightarrow \overline{B \rightarrow C}) \\ & ((\bar{C} \rightarrow \bar{C}(B \vee D))(C \rightarrow \overline{\bar{C}(B \vee D)}) = \\ & = (B \vee D\bar{C})(\bar{B} \vee \bar{D} \vee C)(D \vee \bar{B} \vee C)(\bar{D} \vee B\bar{C})(C \vee B\bar{C} \vee \bar{C}D)(\bar{C} \vee C \vee \bar{B}\bar{D}) = \\ & = \dots = B\bar{C}D. \end{aligned}$$

Таким образом, заключение прямо противоположно предыдущему – виновны Браун и Смит, а Джонс невиновен.

Если же полагаться на информацию только тех, кто невиновен (т.е. использовать посылки $(\bar{B} \rightarrow D\bar{C}), (\bar{D} \rightarrow (B \rightarrow C)), (\bar{C} \rightarrow \bar{C}(B \vee D))$), то получим третий результат: установить в точности, кто виноват, без дополнительной информации нельзя.

Таким образом, результаты анализа одной и той же ситуации с привлечением одного и того же аппарата – логики высказываний – существенно меняются в зависимости от того, как мы формализуем задачу проверки правильности рассуждения и какие факты мы будем считать установленными.

Дедуктивные схемы рассуждений, верные в силу самой своей конструкции (без проникновения в содержательный смысл посылок и заключений), т.е. понимаемые так: «Если истинны высказывания со структурами, выражаемыми формулами A_1, A_2, \dots, A_n (посылки), то истинно и высказывание, выраженное формулой B (заключение) с такой-то структурой», называются **правилами вывода** или **силлогизмами**, или **модусами**. Несложно убедиться в том, что следующие схемы рассуждений являются правилами вывода (силлогизмами):

1. Условные силлогизмы

$$\frac{A \rightarrow B, A}{B} \text{ - правило утверждения (modus ponens);}$$

Ясно, что это правило вывода имеет четыре разновидности, получаемые наряду с исходным заменой переменных в нем на их отрицания:

$$\frac{A \rightarrow B, A}{B}, \frac{\bar{A} \rightarrow B, \bar{A}}{B}, \frac{A \rightarrow \bar{B}, A}{\bar{B}}, \frac{A \rightarrow B, A}{B}, \frac{\bar{A} \rightarrow \bar{B}, \bar{A}}{\bar{B}}.$$

Поэтому, указывая далее правила вывода, мы всегда будем подразумевать подобную возможность замены переменных на их отрицания и, более того, возможность замены переменных произвольными формулами алгебры высказываний.

$$\frac{A \rightarrow B, \bar{B}}{\bar{A}} - \text{правило опровержения (modus tollens);}$$

$$\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C} - \text{чисто условный силлогизм;}$$

$$\frac{A \leftrightarrow B, A}{B}, \frac{A \leftrightarrow B, B}{A} - \text{силлогизмы для эквиваленции.}$$

2. Дизъюнктивные силлогизмы

$\frac{A \vee B, \bar{A}}{B}$ - отрицающе-утверждающий модус (правило удаления дизъюнкции);

Этот модус может иметь и более сложную схему, например:

$$\frac{A \vee B \vee C, \bar{A}, \bar{B}}{C};$$

$$\frac{A + B, A}{\bar{B}} - \text{утверждающе-отрицающий модус. Здесь «+» -}$$

разделительное «или» (сильная дизъюнкция, отрицание эквиваленции).

3. Дилеммы

$$\frac{A \rightarrow B, C \rightarrow B, A \vee C}{B} - \text{простая конструктивная дилемма;}$$

$$\frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C}{B \vee D} - \text{сложная конструктивная дилемма;}$$

$$\frac{A \rightarrow B, A \rightarrow C, \bar{B} \vee \bar{C}}{\bar{A}} - \text{простая деструктивная дилемма;}$$

$$\frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D, \overline{B} \vee \overline{D}}{\overline{A} \vee \overline{C}} - \text{сложная деструктивная дилемма};$$

Приведенные выше силлогизмы являются **примерами** правил вывода, т.к. в силу определения правил вывода ясно, что их можно построить бесконечно много. Например, схема рассуждения парадокса Зенона – один из модусов.

В реальной жизни рассуждение может оказаться сложным, представляющим собой длинную цепочку более простых рассуждений. В связи с этим введем понятия доказательства и формального вывода, часто используемые в математике.

Определение 6.1. Доказательством в аксиоматической теории называют последовательность формул (утверждений) C_1, C_2, \dots, C_n , в которой всякая формула есть либо аксиома, либо логическое следствие каких-либо предыдущих формул этой последовательности. Всякое доказательство C_1, C_2, \dots, C_n является доказательством своей последней формулы (утверждения, тезиса доказательства) C_n .

Определение 6.2. Формальным выводом из множества гипотез (аргументов) $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m\}$ называется последовательность формул (утверждений) C_1, C_2, \dots, C_n , в которой всякая формула есть либо аксиома, либо гипотеза, либо логическое следствие каких-либо предыдущих формул этой последовательности. Всякий формальный вывод C_1, C_2, \dots, C_n является формальным выводом своей последней формулы (утверждения, тезиса формального вывода) C_n из данной совокупности гипотез.

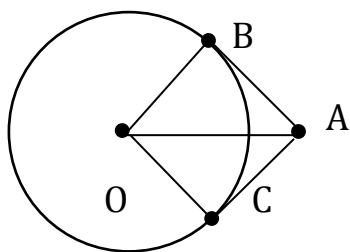
Понятие доказательства и формального вывода ярко проявляется, например, при построении геометрии на плоскости (планиметрии) и решения конкретных геометрических задач в средней школе.

Доказательство большинства теорем или решение практических задач в математике имеет характер формального вывода.

При построении доказательств или формальных выводов, как следует из определения этих понятий, в доказательство или формальный вывод можно вставлять ранее доказанные утверждения, используя соответствующие теоремы в качестве правил вывода.

Пример 6.4. Решить следующую задачу. Вне круга с центром в точке O взята точка A , из которой к окружности проведены две касательные AB и AC , образующие угол 120° . Доказать, что $AB + AC = AO$.

Доказательство.



Дано:

AB – касательная (C_1);

AC – касательная (C_2);

OB – радиус (C_3);

OC – радиус (C_4);

$\angle BAC = 120^\circ$ (C_5)

Доказать:

$AB + AC = AO$ (C_6).

Имеем (здесь во всех нижеприведенных рассуждениях конструкция

«...»⁽ⁿ⁾ \Rightarrow «...» означает, что из заданной совокупности посылок логически следует по правилу вывода n следующее заключение):

$$1) \left. \begin{array}{l} AB - \text{касательная } (C_1) \\ OB - \text{радиус } (C_3) \end{array} \right\} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} AB \perp OB (C_7);$$

$$2) \left. \begin{array}{l} AC - \text{касательная } (C_2) \\ OC - \text{радиус } (C_4) \end{array} \right\} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} AC \perp OC (C_8);$$

((1) – теорема о радиусе, проведенном в точку касания).

$$3) \left. \begin{array}{l} AB - \text{касательная } (C_1) \\ AC - \text{касательная } (C_2) \end{array} \right\} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} AB = AC (C_9);$$

((2) – теорема-свойство касательных, проведенных из одной точки вне окружности).

$$4) \{ C_3, C_4, C_7, C_8, C_9 \} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \Delta ABO = \Delta ACO (C_{10});$$

((3) – признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам).

$$5) \{ C_{10} \} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \angle BAO = \angle CAO (C_{11});$$

((4) – теорема о свойствах равных треугольников).

$$6) \{ C_{11}, C_5 \} \stackrel{(5)}{\Rightarrow} \angle BOA = \angle COA = 60^\circ (C_{12});$$

((5) – теорема о сумме углов с одной общей стороной).

$$6) \{ C_{11}, C_7, C_8 \} \stackrel{(6)}{\Rightarrow} \angle BOA = \angle COA = 30^\circ (C_{13});$$

((6) – теорема о сумме острых углов прямоугольного треугольника).

$$7) \{ C_7, C_8, C_{13} \} \stackrel{(7)}{\Rightarrow} AB = AC = \frac{1}{2} AC (C_{14});$$

((7) – свойства прямоугольного треугольника).

$$8) \{ C_{14} \} \stackrel{(8)}{\Rightarrow} AB + AC = AO (C_6).$$

((8) – свойства сложения чисел).

Таким образом, $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_6$ – искомое доказательство.

При построении доказательств (формальных выводов) наиболее распространенными являются следующие ошибки.

1. Тезис доказательства должен оставаться неизменным на протяжении всего доказательства. «Подмена тезиса» - так называется ошибка, которая возникает при нарушении этого правила. Разновидностью подмены тезиса является ошибка «довод к

человеку», состоящая в сведении обоснования истинности или ложности самого тезиса с помощью объективных аргументов, относящихся к положительной или отрицательной характеристике личности человека, утверждения которого поддерживаются или отвергаются (чем часто грешат современные политики). Разновидностью довода к человеку является ошибка «довод к публике», состоящая в попытках воздействовать на чувства людей с тем, чтобы те поверили в истинность выдвинутого тезиса. Подмена доказываемого тезиса может заходить так далеко, что она превращается в так называемый «переход в другой род». Есть две разновидности этой ошибки - «Кто слишком много доказывает, тот ничего не доказывает» (пытаются доказать вместо данного тезиса более сильное утверждение, которое зачастую может оказаться ложным) и «Кто слишком мало доказывает, тот ничего не доказывает» (доказывается более слабый тезис по сравнению с данным).

2. Аргументы, которые приводятся в подтверждение тезиса, должны быть истинными и не противоречить друг другу. При нарушении этого правила возникает ошибка, которую называют «основное заблуждение». Аргументы должны быть такими высказываниями, истинность которых доказывается самостоятельно, независимо от тезиса данного доказательства. В противном случае возникает ошибка «порочный круг» ибо тезис обосновывается аргументами, а аргументы – тезисом. Когда доказательство представляет собой длинную цепь рассуждений, «порочный круг» может остаться незамеченным.

3. Правила относительно формы доказательства можно сформулировать так: тезис должен быть заключением, логически следующим из аргументов по правилам вывода или полученным в

соответствии с правилами косвенного доказательства. В противном случае возникает ошибка «не следует». Возможны также ошибки «от смысла разделительного к смыслу собирательному» (о целом утверждают то, что справедливо только относительно частей этого целого) и «от собирательного смысла к смыслу разделительному» (утверждения, справедливые только относительно целого, переносятся на отдельные части этого целого).

7. Предикаты. Классификация предикатов в данной области

В алгебре высказываний (АВ) сложные высказывания строятся из простых (атомарных) высказываний с помощью логических операций. При этом атомарные высказывания рассматриваются неделимыми, их структура не анализируется. Однако не всякие высказывания и не любые логические рассуждения могут быть описаны на языке алгебры высказываний. Во многих случаях высказывания касаются свойств объектов или отношений между объектами. Истинность подобного рода высказываний может меняться при изменении объектов, о которых идет речь, хотя структура высказываний при этом остается неизменной. Таким образом, аппарат, подходы и результаты алгебры высказываний могут быть применены только к очень узкому классу ситуаций – самых простых рассуждений на естественном языке.

Это приводит к необходимости расширять алгебру высказываний и строить такую логическую систему, в рамках которой можно было бы исследовать структуру и содержание тех высказываний, которые в рамках алгебры высказываний считались бы атомарными. Такой логической системой является логика (алгебра) предикатов (ЛП), составной частью которой (подалгеброй) является алгебра высказываний ($AB \subseteq ЛП$). В основе логики предикатов лежит понятие предиката. На латыни слово «предикат»

(praedicatum) означает «сказуемое», т.е. то, что в элементарном суждении утверждается о субъекте этого суждения, свойства этого субъекта. Определим это понятие.

Определение 7.1. *С формальной точки зрения n -местным предикатом в области D ($D \neq \emptyset$) называется произвольная функция вида $P: D^n \rightarrow B$ ($B = \{0, 1\}$ – булево множество; $n \in \mathbb{N}$). Иными словами, предикатом называется функция, значениями которой служат высказывания.*

Пример 7.1.

1. $P(x) :=$ « x – река России» – одноместный предикат на множестве названий рек;

2. $P(x) :=$ « x – простое число» – одноместный предикат на множестве \mathbb{N} натуральных чисел;

3. $P(x) :=$ « $x \notin \mathbb{N}$ » – одноместный предикат на множестве \mathbb{Z} целых чисел;

4. $P(x, y) :=$ « $x - 2 \leq y$ » – двухместный предикат на множестве \mathbb{R} действительных чисел;

5. $P(x, y, z) :=$ « $x + z = y^2$ » – трехместный предикат на множестве \mathbb{R} действительных чисел.

Таким образом, любое уравнение, любое неравенство, любое отношение между элементами множества в математике определяет некоторый предикат.

Понятие предиката в области D можно обобщить, рассмотрев в качестве области определения предиката декартово произведение нескольких различных множеств. Подобного рода предикаты называются **полиморфными**. Например, двухместный предикат

6. $P(x, y) :=$ « x – река y » определен на декартовом произведении множества названий рек и множества названий стран,

т.е. является полиморфным. В дальнейшем название «полиморфный» подчеркивать не будем, а тот факт, с каким предикатом имеем дело, будет понятен из контекста.

Определение 7.2. Областью истинности (ОИ) n -местного предиката в области D называется множество наборов из D^n , на которых предикат принимает значение 1 (истина), или:

$$ОИ(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{\alpha} \in D^n \mid P(\tilde{\alpha})=1\}.$$

Аналогично определяется область ложности (ОЛ) предиката:

$$ОЛ(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{\alpha} \in D^n \mid P(\tilde{\alpha})=0\}.$$

Очевидны следующие соотношения между областями истинности и ложности предиката в области D :

$$ОИ(P) \cup ОЛ(P) = D^n \text{ и } ОИ(P) \cap ОЛ(P) = \emptyset.$$

Определение 7.3. Существуют четыре класса предикатов в области D – класс выполнимых (ВП), опровержимых (ОП), тождественно истинных (ТИ) и тождественно ложных (ТЛ), а именно:

$$P \in \text{ВП} \stackrel{\text{def}}{=} \exists \tilde{\alpha} \in D^n: P(\tilde{\alpha})=1 \text{ (} ОИ(P) \neq \emptyset \text{ или } ОЛ(P) \neq D^n \text{);}$$

$$P \in \text{ОП} \stackrel{\text{def}}{=} \exists \tilde{\alpha} \in D^n: P(\tilde{\alpha})=0 \text{ (} ОЛ(P) \neq \emptyset \text{ или } ОИ(P) \neq D^n \text{);}$$

$$P \in \text{ТИ} \stackrel{\text{def}}{=} \forall \tilde{\alpha} \in D^n: P(\tilde{\alpha})=1 \text{ (} ОИ(P) = D^n \text{ или } ОЛ(P) = \emptyset \text{);}$$

$$P \in \text{ТЛ} \stackrel{\text{def}}{=} \forall \tilde{\alpha} \in D^n: P(\tilde{\alpha})=0 \text{ (} ОЛ(P) = D^n \text{ или } ОИ(P) = \emptyset \text{);}$$

Из определения классов ясно, что:

$$P \in \text{ВП} \Rightarrow P \notin \text{ТЛ}; P \in \text{ОП} \Rightarrow P \notin \text{ТИ}; P \in \text{ТИ} \Rightarrow P \in \text{ВП}; P \in \text{ТЛ} \Rightarrow P \in \text{ОП}.$$

Пример 7.2. Двухместный предикат $Q(x,y) := (3x + 2y^2 - 5 > 0)$ в области \mathbb{R} :

- выполним, т.к., например, $Q(1,2) = 1$;
- опровержим, т.к., например, $Q(1, 1) = 0$;
- не является тождественно истинным, т. к. опровержимый;

- не является тождественно ложным, т.к. выполнимый.

Пример 7.3. Двухместный предикат $Q(x,y) := (3x^2 + 2y^2 \geq 0)$ является тождественно истинным на множестве \mathbb{R} действительных чисел.

8. Кванторы. Два способа образования высказываний в ЛП

Из более простых предикатов в заданной области с помощью логических операций, известных в алгебре высказываний, можно строить более сложные предикаты. При этом переход от операций над высказываниями к операциям над предикатами ничем, по сути, не отличается от подобного перехода от операций над элементами множества к операциям над функциями, заданными на этом множестве. Вспомним, например, определение суммы двух функций, заданных на некотором множестве M . Пусть $f: M^n \rightarrow M$ и $g: M^n \rightarrow M$ – две n -местные функции на множестве M . Тогда их суммой $(f+g)$ называется такая функция, значения которой на любом наборе $\tilde{\alpha}$ значений переменных вычисляются по правилу $(f+g)(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha}) + g(\tilde{\alpha})$. В силу сказанного, имеем:

Определение 8.1. Пусть P и Q – два n -местных предиката в некоторой области D . Тогда $\forall \tilde{\alpha} \in D^n$:

$$\overline{(P)}(\tilde{\alpha}) \stackrel{def}{=} \overline{P(\tilde{\alpha})};$$

$$(P \wedge Q)(\tilde{\alpha}) \stackrel{def}{=} P(\tilde{\alpha}) \wedge Q(\tilde{\alpha});$$

$$(P + Q)(\tilde{\alpha}) \stackrel{def}{=} P(\tilde{\alpha}) + Q(\tilde{\alpha}).$$

$$(P \vee Q)(\tilde{\alpha}) \stackrel{def}{=} P(\tilde{\alpha}) \vee Q(\tilde{\alpha});$$

$$(P \rightarrow Q)(\tilde{\alpha}) \stackrel{def}{=} P(\tilde{\alpha}) \rightarrow Q(\tilde{\alpha});$$

$$(P \leftrightarrow Q)(\tilde{\alpha}) \stackrel{def}{=} P(\tilde{\alpha}) \leftrightarrow Q(\tilde{\alpha});$$

В алгебре высказываний многие высказывания можно рассматривать *как значения* соответствующих предикатов. Например, высказывание «Волга – река России» - это значение предиката « x – река России» при $x =$ «Волга», или высказывание $2 \times 2 = 4$ можно рассматривать как значение двухместного предиката « $xy = 4$ » (например, на множестве \mathbb{Z} целых чисел) на наборе значений переменных $(x, y) = (2, 2)$.

Однако не всякое высказывание в АВ можно рассматривать как значение соответствующего предиката. Например, высказывания «Все люди – смертны» или «Существуют натуральные числа» нельзя рассматривать *как значения* соответствующих предикатов $C(x) :=$ « x – смертен» (на множестве людей земного шара) или $N(x) :=$ « x – натуральное число» = « $x \in \mathbb{N}$ » (на множестве, например, \mathbb{Z} целых чисел). В этих высказываниях утверждения касаются или сразу всех или некоторых (но не зафиксированных) элементах области определения соответствующих предикатов. Введем в рассмотрение вспомогательные символы \forall и \exists (называемые в дальнейшем *кванторами*), позволяющие записывать символически высказывания указанного выше типа.

Определение 8.2. Пусть $P(x)$ – некоторый предикат в области D . Тогда $\forall x P(x)$ – высказывание, утверждающее « для любого элемента множества D предикат P выполняется (истинный; принимает значение «истина»)», а $\exists x P(x)$ – высказывание, утверждающее « существует такой элемент множества D на котором предикат P выполняется (истинный; принимает значение «истина»)».

Квантор \forall называется *квантором общности* и читается «для любого», «для всех», «для каждого». Квантор \exists называется *квантором существования* и читается «существует (хотя бы один)», «найдется

(хотя бы один)», «можно указать (хотя бы один)». Переход от предиката $P(x)$ к высказыванию $\forall x P(x)$ будем называть *навешиванием квантора общности по переменной x на предикат $P(x)$* . Переход от предиката $P(x)$ к высказыванию $\exists x P(x)$ будем называть *навешиванием квантора существования по переменной x на предикат $P(x)$* . В высказываниях $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$ переменная x – фиктивная, вместо нее нельзя подставлять никаких конкретных значений, она служит только для того, чтобы сформулировать соответствующее высказывание. В этом смысле высказывания, например, $\exists x P(x)$ и $\exists y P(y)$ – это одно и то же высказывание «существуют элементы в области определения предиката, на которых он принимает значение «истина»». Заметим, что использовать кванторы без соответствующих переменных или навешивать квантор на предикат по переменной, от которой предикат не зависит – бессмысленно.

Определение 8.3. В высказываниях $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$ предикат $P(x)$ называется *областью действия* квантора по переменной x . Переменная, находящаяся в области действия квантора по этой переменной называется *связанной* (соответствующим квантором). В противном случае переменная называется *свободной*. Предикат не зависит от своих связанных переменных.

Навешивание квантора на предикат формирует высказывание об области истинности предиката. Высказывание $\forall x P(x)$ утверждает, что $OИ(P) = D$, если D – область определения предиката $P(x)$. Другими словами, высказывание $\forall x P(x)$ – истинное тогда и только тогда, когда предикат $P(x)$ – тождественно истинный в D , т.е. $\forall x P(x) = 1 \Leftrightarrow P(x) \in ТИ$. Аналогично, высказывание $\exists x P(x)$ утверждает, что $OИ(P) \neq \emptyset$. Другими словами, высказывание $\exists x P(x)$ – истинное тогда и только тогда, когда предикат $P(x)$ – выполнимый в области D , т.е. $\exists x P(x) = 1$

$\Leftrightarrow P(x) \in \text{ВП}$ (или $\text{ОИ}(P) \neq \emptyset$). Аналогично предыдущему: $\forall x P(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) \in \text{ОП}$ и $\exists x P(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) \in \text{ТЛ}$ в области определения предиката $P(x)$. Подобное прочтение высказываний с кванторами помогает выбирать (строить) предикаты с заданными свойствами при интерпретации формул ЛП.

Итак, в логике предикатов высказывания образуются двояко: или как значения соответствующих предикатов, или в результате навешивания кванторов на предикат как утверждения об области истинности предиката (как утверждения о свойстве предиката быть тождественно истинным или выполнимым).

Заметим, что если область определения D предиката $P(x)$ – конечное множество, т.е. $D = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, то высказывания $\forall x P(x)$ и $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$ равносильны, равно как равносильны высказывания $\exists x P(x)$ и $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$, т.е.:

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n),$$

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n).$$

Таким образом, квантор общности обобщает операцию конъюнкции на случай бесконечных множеств, а квантор существования – обобщает операцию дизъюнкции на случай бесконечных множеств. Поэтому навешивания кванторов общности и существования на предикаты в логике предикатов являются дополнительными логическими операциями над предикатами.

Заметим еще, что навешивание квантора на предикат связывает некоторую переменную предиката и, тем самым, уменьшает количество свободных переменных предиката на единицу. Если в результате навешивания кванторов на предикат последний теряет все свои свободные переменные, то он превращается в нульместный предикат, т.е. в высказывание. Итак, нульместные предикаты – высказывания. Именно тот факт, что всякое высказывание – или

нульместный предикат, или значение некоторого предиката (тоже нульместный предикат) позволяет нам рассматривать алгебру высказываний составной частью (подалгеброй) логики предикатов ($AB \subseteq ЛП$).

Пример 8.1. Классифицировать предикат $\exists x \exists y (x^2 + y^2 - z = 0)$ в области \mathbb{R} действительных чисел. Найти его области истинности и ложности.

Решение. Переменные x и y в предикате фиктивные (связанные соответствующими кванторами). Поэтому предикат зависит только от переменной z , т.е.: $P(z) = \exists x \exists y (x^2 + y^2 - z = 0)$. При всяком конкретном значении $z = a$ переменной z предикат $P(z)$ порождает высказывание $P(a) = \exists x \exists y (x^2 + y^2 - a = 0)$ в котором утверждается, что в \mathbb{R} найдутся такие x и y , которые являются корнями уравнения $x^2 + y^2 = a$. Это утверждение верное (истинное), если $a \geq 0$ и ложное для $a < 0$. Поэтому:

$$ОИ(P) = \{a \in \mathbb{R} / a \geq 0\} = \mathbb{R}^+ \neq \emptyset \text{ и } ОЛ(P) = \{a \in \mathbb{R} / a < 0\} = \mathbb{R}^- \neq \emptyset.$$

Следовательно, $P \in ВП$, $P \in ОП$, $P \notin ТИ$, $P \notin ТЛ$.

Пример 8.2. В \mathbb{R} задан предикат $P(x, y) = (x - y^2 = 0)$. Найти значения высказываний

$$\forall x \forall y P(x, y), \exists x \exists y P(x, y), \forall x \exists y P(x, y), \exists x \forall y P(x, y).$$

Решение. В высказывании $\forall x \forall y P(x, y) = \forall x \forall y (x - y^2 = 0)$ утверждается, что любые пары действительных чисел x и y являются решениями уравнения $x - y^2 = 0$. Это неверно. Например, пара $(0, 1)$ не является решением уравнения. Поэтому высказывание $\forall x \forall y (x - y^2 = 0)$ ложное, т.е. $\forall x \forall y (x - y^2 = 0) = 0$.

В высказывании $\exists x \exists y (x - y^2 = 0)$ утверждается, что найдется такая пара действительных чисел x и y , которые являются решениями уравнения $x - y^2 = 0$. Это правда, т.к., например, пара чисел $(1, 1)$

является решением уравнения. Поэтому высказывание $\exists x \exists y (x - y^2 = 0)$ – истинное, т.е. $\exists x \exists y (x - y^2 = 0) = 1$.

В высказывании $\forall x \exists y (x - y^2 = 0)$ утверждается, что для любого действительного числа x можно подыскать такое действительное число y , что пара этих чисел является решением уравнения $x - y^2 = 0$. Это неверно, ибо для отрицательного числа x подыскать соответствующее действительное число y нельзя. Таким образом, высказывание $\forall x \exists y (x - y^2 = 0)$ – ложное, т.е. $\forall x \exists y (x - y^2 = 0) = 0$.

В высказывании $\exists x \forall y (x - y^2 = 0)$ утверждается, что найдется такое действительное число x , что независимо от значений y , имеет место $x - y^2 = 0$. Это неверно. Таким образом, высказывание $\exists x \forall y (x - y^2 = 0)$ – ложное, т.е. $\exists x \forall y (x - y^2 = 0) = 0$.

9. Формулы ЛП

Как и в алгебре высказываний, в логике предикатов игнорируется содержательный смысл предикатов и высказываний, а принимается во внимание только тот факт, как из более простых формул этой теории строятся более сложные и как именно строятся. Таким образом, логика предикатов оперирует **формулами ЛП**. Уточним это понятие для ЛП. Для этого нам понадобится алфавит ЛП.

Определение 9.1. Пусть:

$A_1 = \{x_1, \dots, x_k, \dots\}$ - счетное множество символов (букв)

предметных переменных.

$A_2 = \{a_1, \dots, a_k, \dots\}$ - счетное множество символов (букв)

предметных параметров.

$A_3 = \{f_i^k \mid i, k \in \mathbb{N}\}$ - счетное множество функциональных

символов (букв) ($i \in \mathbb{N}$ – порядковый номер, а $k \in \mathbb{N}_0$ – местность функционального символа).

$A_4 = \{P_j^n \mid j \in N, n \in N_0\}$ - счетное множество предикатных символов (букв) ($i \in N$ - порядковый номер, а $n \in N_0$ - местность предикатного символа).

$A_5 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists\}$ - символы логических операций.

$A_6 = \{\langle \langle \rangle, \rangle \rangle, \langle \rangle, \rangle\}$ - множество «технических» символов (две скобки – открывающая и закрывающая и запятая).

Тогда $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$ - алфавит логики предикатов.

Как и в алгебре высказываний, всякая конечная последовательность букв алфавита ЛП называется словом в этом алфавите. Из множества слов в алфавите ЛП правилами построения выделяются формулы ЛП. Понятие формулы в ЛП значительно сложнее подобного понятия алгебры высказываний. Для определения понятия формулы нам понадобится понятие терма.

Определение 9.2. Терм'ы в ЛП образуются по двум правилам:

1) $\alpha \in A_1 \cup A_2 \Rightarrow \alpha$ - терм;

2) t_1, t_2, \dots, t_n - терм'ы $\wedge f_i^k \in A_3 \Rightarrow f_i^k(t_1, t_2, \dots, t_n)$ - терм;

Из определения *терм'а* следует, что *терм* - это некоторая формула обычной математики и его название «*терм*» используется с тем, чтобы различать формулы обычной математики и формулы изучаемой теории – логики предикатов. Например, формула $(2x - 3y + 5)$ - *терм* (в этой формуле используются двухместные функциональные символы (символы операций) – умножения, вычитания и сложения, как символы подалфавита A_3 и константы, как нульместные функциональные символы подалфавита A_3).

Определение 9.3. Формулы логики предикатов задаются следующими правилами построения (здесь ФЛП – множество формул ЛП):

1) $P_i^0 \in A_4 \Rightarrow P_i^0$ - атомарная формула ЛП;

2) t_1, t_2, \dots, t_n – термы $\wedge P_i^n \in A_4 \Rightarrow P_i^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ – атомарная формула ЛП;

3) $F \in \Phi\text{ЛП} \Rightarrow (\bar{A}) \in \Phi\text{ЛП}$;

4) $F \in \Phi\text{ЛП} \wedge G \in \Phi\text{ЛП} \Rightarrow (F * G) \in \Phi\text{ЛП}$, если $*$ $\in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;

5) $F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \Phi\text{ЛП} \wedge K \in \{\exists, \forall\} \Rightarrow$

$(Kx_i F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)) \in \Phi\text{ЛП}$;

6) Других формул нет.

Как следует из определения, формула ЛП представляет собой абсолютно формальную конструкцию, не несущую в себе никакого содержательного смысла – это некоторая последовательность символов (букв), построенная по определенным правилам. Условимся о следующих правилах экономии скобок при записи формул ЛП:

- внешние скобки не использовать (т.е. вместо (F) писать F);
- черта отрицания одновременно заменяет скобки (т.е. вместо (\bar{F}) писать \bar{F});
- если формула не содержит скобок, то в ней операции выполняются в следующем порядке (слева направо в порядке убывания «старшинства» операций) $K, \bar{}, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (здесь $K \in \{\exists, \forall\}$);
- областью действия квантора по некоторой переменной является ближайший, следующий за этим квантором, предикат (подформула).

Кроме того, при записи формул ЛП мы не будем строго придерживаться определения алфавита ЛП – для записи переменных будем использовать маленькие буквы конца латинского алфавита **x, y, z** и другие; для записи символов термов – маленькие буквы латинского алфавита **f, g, h, φ** и другие; для записи символов предикатов – большие буквы конца латинского алфавита **P, Q, R, S** и другие.

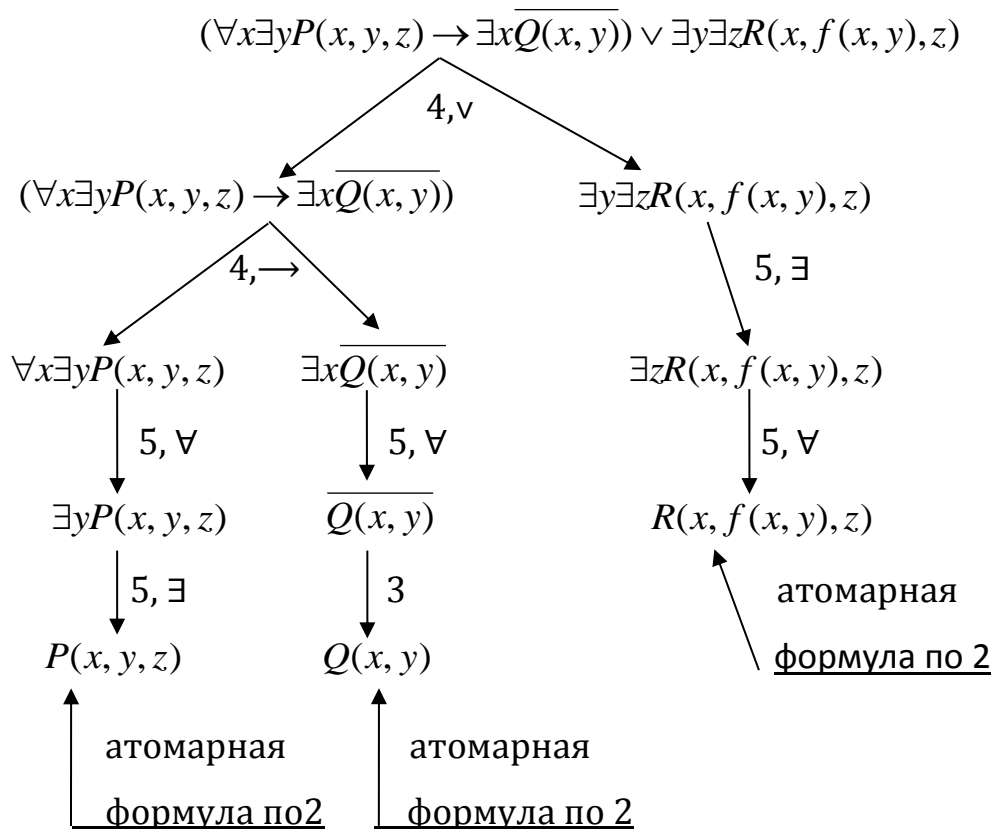
Определение 9.4. Часть (подслово) H заданной формулы F , которая в свою очередь является формулой, называется **подформулой** исходной формулы (обозначение $H \preceq F$).

С практической точки зрения убедиться в том, является или нет заданное слово формулой, можно с помощью построения ориентированного дерева подформул. Корень такого дерева содержит проверяемое слово, вершины располагаются по ярусам (уровням) и содержат подслова тех слов, которые содержатся на предыдущем ярусе и выделяются из них с помощью одного и только одного из правил построения формул. Ребра же такого дерева исходят из вершин, соответствующих подслов исходного слова и входят в вершины, соответствующие подсловам, выделяемым из подслов предыдущего яруса соответствующим правилом построения формул.

Пример 9.1. Проверить, является ли формулой ЛП следующее слово:

$$\forall x \exists y P(x, y, z) \rightarrow \exists x Q(x, y) \vee \exists y \exists z R(x, f(x, y), z)$$

Построим ориентированное дерево для исходного слова. Имеем:



Поскольку «листья» этого дерева – атомарные формулы, то двигаясь по дереву снизу вверх и применяя соответствующие правила построения формул (номера которых указаны рядом с ребрами), получим в итоге исходное слово. Таким образом, проверяемое слово формулой является.

Для формул логики предикатов, аналогично тому, как это было сделано для предикатов, устанавливаются понятия свободных и связанных переменных:

Определение 9.5. *Переменная называется **свободной** в данной формуле, если она имеет хотя бы одно свободное вхождение в формулу (не находится в области действия квантора по этой переменной). В противном случае она называется **связанной** в данной формуле. Формула, не имеющая свободных вхождений переменных, называется **замкнутой**.*

Пример 9.2. В формуле $(\forall x \exists y P(x, y, z) \rightarrow \exists x \overline{Q(x, y)}) \vee \exists y \exists z R(x, f(x, y), z)$ переменные x, y, z имеют как свободные, так и связанные вхождения. Поэтому в указанной формуле **свободными** являются все три переменные.

10. Интерпретации формул ЛП

Как уже отмечалось выше, формула логики предикатов не несет никакой смысловой нагрузки. Содержательный смысл формула ЛП приобретает в **интерпретациях**. Понятие интерпретации формулы ЛП на порядок сложнее подобного понятия для алгебры высказываний. Для введения понятия интерпретации в ЛП нам понадобится понятие алгебраической системы.

Определение 10.1. *Под **алгебраической системой** понимают набор $\langle D, \Sigma \rangle$, где $D \neq \emptyset$ – произвольное непустое множество элементов произвольной природы (**основа алгебраической системы**), а $\Sigma = \Sigma_0 \cup$*

Σ_π – **сигнатура** алгебраической системы. При этом, Σ_0 – сигнатура алгебраических операций, заданных на множестве D , а Σ_π – сигнатура предикатов, определенных на множестве D . Если $\Sigma_0 = \emptyset$, то алгебраическая система называется **моделью**, а если $\Sigma_\pi = \emptyset$, то алгебраическая система называется **универсальной алгеброй**.

Пример 10.1. Универсальными алгебрами являются, например, множество натуральных чисел $\langle \mathbb{N}; \{+, \cdot\} \rangle$ (с сигнатурой, содержащей две алгебраические на этом множестве операции – сложение и умножение); множество (кольцо) целых чисел $\langle \mathbb{Z}; \{+, -, \cdot\} \rangle$ - с тремя алгебраическими операциями в сигнатуре; кольцо многочленов относительно умножения и сложения многочленов; поле комплексных чисел относительно сложения и умножения комплексных чисел; кольцо квадратных матриц заданной размерности относительно сложения, вычитания и умножения матриц и т.д.

Определение 10.2. Под интерпретацией формулы логики предикатов мы будем понимать пару $\langle AC; \varphi \rangle$, где AC – некоторая алгебраическая система $AC = \langle D; \Sigma_0 \cup \Sigma_\pi \rangle$, а φ – интерпретирующая функция, наполняющая содержательным смыслом **все** символы исходной формулы – символы переменных превращаются в переменные с изменением в области D (основе алгебраической системы), функциональным символам φ сопоставляет конкретные функции (операции) из Σ_0 , символам предикатов φ сопоставляет конкретные предикаты из Σ_π , символы логических операций под действием φ приобретают свой естественный логический смысл.

Пример 10.2 Задать какую-нибудь интерпретацию формулы

$$\forall x_1 \exists x_2 P_1^2(x_1, f_1^2(x_2, x_3)) \rightarrow \forall x_2 P_2^2(x_1, x_2)$$

Решение. Зададим, например, следующую алгебраическую систему

$$AC = \langle \mathbb{Z}; \{x_2 - 2x_3\} \cup \{x_1 + x_2 \geq 3; ((x_1 + x_2)^2 + 1) : 2\} \rangle$$

и действие интерпретирующей функции (кроме очевидных ее свойств) зададим следующим образом:

$$\varphi(f_1^2(x_2, x_3)) = \langle x_2 - 2x_3 \rangle;$$

$$\varphi(P_1^2(x_1, x_2)) = \langle (x_1 + x_2 \geq 3) \rangle;$$

$$\varphi(P_2^2(x_1, x_2)) = \langle ((x_1 + x_2)^2 + 1) : 2 \rangle.$$

Тогда в этой интерпретации формула принимает вид

$$\forall x_1 \exists x_2 [x_1 + (x_2 - 2x_3) \geq 3] \rightarrow \forall x_2 [((x_1 + x_2)^2 + 1) : 2],$$

т.е. задает в этой интерпретации конкретный предикат $R(x_1, x_3)$.

Например,

$$R(-1, 2) = \forall x_1 \exists x_2 [x_1 + (x_2 - 2 \cdot 2) \geq 3] \rightarrow \forall x_2 [((-1 + x_2)^2 + 1) : 2] = (1 \rightarrow 0) = 0.$$

Еще раз подчеркнем, что формула логики предикатов, в силу определения, не имеет никакого содержательного смысла. Подобный смысл она приобретает только в результате ее интерпретации. Формулы, имеющие свободные вхождения переменных, после интерпретации превращаются в предикаты, зависящие от этих свободных переменных, а замкнутые формулы (не имеющие свободных вхождений переменных) – в высказывания об элементах основы алгебраической системы, привлекаемой для задания этой интерпретации.

11. Классификация формул ЛП

Определение 11.1. Как и для предикатов в данной области, существуют четыре класса формул логики предикатов. Формулы могут быть выполнимыми (ВП), опровержимыми (ОП), тождественно истинными (тавтологиями, законами) (ТИ), тождественно ложными (противоречиями) (ТЛ):

1) $F \in ВП \stackrel{def}{\iff} \exists I = \langle AC; \varphi \rangle: \varphi(F)$ – выполнимый предикат или истинное высказывание (формула называется выполнимой, если существует интерпретация, в которой формула порождает выполнимый в области интерпретации предикат или истинное высказывание);

2) $F \in ОП \stackrel{def}{\iff} \exists I = \langle AC; \varphi \rangle: \varphi(F)$ – опровержимый предикат или ложное высказывание;

3) $F \in ТИ \stackrel{def}{\iff} \forall I = \langle AC; \varphi \rangle: \varphi(F)$ – тождественно истинный предикат или истинное высказывание;

4) $F \in ТЛ \stackrel{def}{\iff} \forall I = \langle AC; \varphi \rangle: \varphi(F)$ – тождественно ложный предикат или ложное высказывание.

Как и в алгебре высказываний, указанные выше классы не являются независимыми:

$$F \in ВП \Rightarrow F \notin ТЛ \text{ и } F \in ОП \Rightarrow F \notin ТИ.$$

Пример 11.1.

1) Если $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – некоторая атомарная формула ЛП, то $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \overline{P(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ – тождественно истинная формула (или закон) в ЛП, а формула $R(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge \overline{P(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ – тождественно ложная (или противоречие) в ЛП;

2) Формула $\forall x_1 \exists x_2 P_1^2(x_1, f_1^2(x_2, x_3)) \rightarrow \forall x_2 P_2^2(x_1, x_2)$ предыдущего примера является опровержимой (ибо нашлась интерпретация, в которой эта формула порождает опровержимый предикат) и, следовательно, не является тождественно истинной (или законом). В интерпретации

$I = \langle AC, \varphi \rangle$, где $AC = \langle \mathbb{Z}; \{x_2 - 2x_3\} \cup \{x_1 + x_2 \geq 3; (x_1 x_2) : 2\} \rangle$ и интерпретирующая функция φ имеет свойства

$$\varphi(f_1^2(x_2, x_3)) = x_2 - 2x_3;$$

$$\varphi(P_1^2(x_1, x_2)) = (x_1 + x_2 \geq 3);$$

$$\varphi(P_2^2(x_1, x_2)) = ((x_1 x_2) : 2)$$

предикат, порождаемый исходной формулой, является выполнимым, т.к. например,

$$R(2, 2) = \forall x_1 \exists x_2 [x_1 + (x_2 - 2 \cdot 2) \geq 3] \rightarrow \forall x_2 [(2x_2) : 2] = (1 \rightarrow 1) = 1.$$

Таким образом, формула является выполнимой и, следовательно, не является тождественно ложной.

Рассмотренный пример свидетельствует о том, что понятие интерпретации формул ЛП намного глубже и сложнее аналогичного понятия в АВ. Для самой простой формулы ЛП существует бесконечно много ее интерпретаций. Это значительно усложняет исследование законов логики предикатов. В силу отмеченного ранее вхождения АВ в ЛП ($AB \subseteq LP$), а также в силу определения операций над предикатами и понятием интерпретации формул ЛП *все* ранее сформулированные в алгебре высказываний *законы АВ остаются справедливыми и для ЛП*. Эта группа законов ЛП носит название *тривиальных законов ЛП*.

Для рассмотрения нетривиальных законов ЛП нам понадобится понятие равенства (равносильности) формул ЛП. Определим это понятие.

Определение 11.2. *Две формулы логики предикатов называются равносильными, если их эквиваленция является формулой тождественно истинной (законом), т.е. $F = G \stackrel{def}{\iff} \vDash (F \leftrightarrow G)$.*

В силу этого определения к законам логики предикатов можно относить правильные равносильности. Приведем основные нетривиальные законы ЛП, для удобства запоминания разбитые на следующие группы.

12. Основные нетривиальные законы ЛП

1). *Законы перестановки кванторов* (здесь формула F зависит от произвольного конечного числа переменных, среди которых есть переменные x и y):

$$\forall x \forall y F = \forall y \forall x F,$$

$$\exists x \exists y F = \exists y \exists x F.$$

Таким образом, одноименные кванторы, соседствующие в некоторой формуле, можно переставлять местами.

2). *Законы отрицания кванторов* (здесь формула F зависит от произвольного конечного числа переменных, среди которых есть переменная x):

$$\overline{\forall x F} = \exists x \overline{F},$$

$$\overline{\exists x F} = \forall x \overline{F}.$$

Таким образом, законы отрицания кванторов обобщают известные в алгебре высказываний законы de Morgan'a.

3). *Законы вынесения кванторов* (здесь формулы F и G зависят от произвольного конечного числа переменных, среди которых есть переменная x):

$$\forall x F \wedge \forall x G = \forall x (F \wedge G),$$

$$\exists x F \vee \exists x G = \exists x (F \vee G).$$

Таким образом, квантор общности по одной и той же переменной можно выносить из конъюнкции, а квантор существования – из дизъюнкции.

Для того, чтобы сформулировать следующую группу законов нам понадобится следующее определение.

Определение 12.1. Формула F логики предикатов называется *относительной константой по переменной x (OK_x)*, если эта переменная не имеет свободных вхождений в формулу F .

4) Законы с относительными константами (здесь формулы F и C зависят от произвольного конечного числа переменных, причем формула F имеет свободные вхождения переменной x , а формула C является относительной константой по переменной x):

$$\forall x F \wedge C = \forall x (F \wedge C)$$

$$\forall x F \vee C = \forall x (F \vee C)$$

$$\exists x F \wedge C = \exists x (F \wedge C)$$

$$\exists x F \vee C = \exists x (F \vee C)$$

Таким образом, законы с относительными константами позволяют выносить кванторы за скобки и из конъюнкции и из дизъюнкции.

5) Правило переименования связанных переменных (здесь формула F зависит от произвольного конечного числа переменных, среди которых есть переменная x).

Если переменная t не имеет никаких вхождений в формулу F , то

$$\forall x F(x, \dots) = \forall t (F(t, \dots))$$

Таким образом, мы можем по своему усмотрению менять обозначения любых связанных переменных данной формулы.

6) Закон существования (правило существования) (здесь формула F зависит от произвольного конечного числа переменных, среди которых есть переменная x). Если a некоторый параметр (элемент подалфавита A_2 логики предикатов), то

$$\models (F(a, \dots) \rightarrow \exists x F(x, \dots)).$$

7) Закон обобщения (правило обобщения) (здесь формула F зависит от произвольного конечного числа переменных, среди которых есть

переменная x). Если a некоторый параметр (элемент подалфавита A_2 логики предикатов), то

$$\models (\forall x F(x, \dots) \rightarrow F(a, \dots)).$$

Определение 12.2. Если $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_1, x_2, \dots, x_n все свободные переменные формулы F , то формула $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, полученная из $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ навешиванием на нее кванторов общности по всем свободным переменным, называется **замыканием** исходной формулы $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

8) Правило замыкания. Если $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

$$\models F(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Таким образом, формула логики предикатов тождественно истинна тогда и только тогда, когда ее замыкание также тождественно истинная формула. Это правило позволяет нам при изучении нетривиальных законов логики предикатов ограничиться рассмотрением исключительно замкнутых формул.

Пример 12.1. Доказать правило замыкания. Если $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

$$\models F(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Доказательство. Доказательство правила замыкания почти очевидно в силу определения квантора общности (высказывание $\forall x P(x)$ - истинное тогда и только тогда, когда предикат $P(x)$ - тождественно истинный в своей области определения). Рассмотрим произвольную интерпретацию $I = \langle A; \varphi \rangle$. В этой интерпретации формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ порождает тождественно истинный предикат (ибо, по условию $\models F(x_1, x_2, \dots, x_n)$). Поэтому, навешивая последовательно на тождественно истинный предикат $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ каждый раз новый квантор по очередной переменной, мы будем на каждом шаге

получать снова тождественно истинный предикат, пока не получим итоговое истинное высказывание $\models \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Т.о.,
 $\models F(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow \models \forall x_n F(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \models \forall x_2 \cdots \forall x_n F(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow$
 $\models \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

К сожалению, в логике предикатов нет единых (универсальных) алгоритмов проверки формул на предмет их тождественной истинности в отличие от алгебры высказываний, где подобными алгоритмами могут служить алгоритм построения таблицы Квайна для данной формулы или алгоритм построения любой нормальной формы АВ (например, ДНФ) этой формулы (или ее отрицания). Все сказанное выше значительно усложняет доказательство законов ЛП. Однако для основных законов ЛП, сформулированных в виде тождеств, можно предложить следующую схему их доказательства:

$$F = G \Leftrightarrow \models (F \leftrightarrow G) \Leftrightarrow \models [(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)] \Leftrightarrow \models (F \rightarrow G) \wedge \models (G \rightarrow F).$$

Таким образом, для доказательства тождества в ЛП необходимо и достаточно установить тождественную истинность двух импликаций. Для импликаций проверку их тождественной истинности можно провести методом «от противного». Покажем на конкретном примере реализацию такого доказательства.

Пример 12.2. Доказать закон перестановки кванторов

$$\forall x \forall y F = \forall y \forall x F.$$

Доказательство. Как уже отмечалось выше, достаточно установить тождественную истинность двух импликаций. В нашем случае достаточно доказать, что

$$\models (\forall x \forall y F \rightarrow \forall y \forall x F) \text{ и } \models (\forall y \forall x F \rightarrow \forall x \forall y F).$$

Рассмотрим первую из этих импликаций. Пусть z_1, z_2, \dots, z_m - все свободные переменные этой формулы и $F = F(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$. Рассмотрим произвольную ее интерпретацию $I = \langle AC; \varphi \rangle$ ($AC = \langle D;$

$\Sigma_0 \cup \Sigma_\pi$) и значение рассматриваемой импликации на произвольном наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ значений ее свободных переменных. Получим некоторое высказывание. Предположим, что это высказывание ложно. Для упрощения дальнейших выкладок обозначим $F(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ как $G(x, y)$. Тогда имеем:

$$(\forall x \forall y G(x, y) \rightarrow \forall y \forall x G(x, y)) = 0.$$

Далее, по свойствам импликации, получим:

$$\begin{cases} \forall x \forall y G(x, y) = 1, \\ \forall y \forall x G(x, y) = 0. \end{cases}$$

Проанализируем высказывания полученной системы. Второе высказывание ложное. В нем утверждается, что «для любого элемента y области интерпретации (множества D) предикат $\forall x G(x, y)$ выполняется». Это утверждение неверное (ибо второе высказывание системы – ложное). Тогда истинным будет высказывание «найдется в D такой элемент, на котором предикат $\forall x G(x, y)$ не выполняется, т.е. ложен». Итак,

$$\exists y = m \in D : \forall x G(x, m) = 0.$$

новое высказывание $\forall x G(x, m)$ оказалось тоже ложным. Анализируя его аналогично предыдущему, получим:

$$\exists x = n \in D : G(n, m) = 0.$$

Последнее высказывание $G(n, m)$ - ложное и представляет собой значение предиката $G(x, y)$ на конкретном фиксированном наборе значений переменных $(x, y) = (n, m)$ ($G(n, m) = 0$).

Первое высказывание системы истинное. В нем утверждается, что «для любого элемента x области интерпретации предикат $\forall y G(x, y)$ выполняется (истинный)». Это утверждение верное в силу того, что высказывание – истинное. Таким образом, $\forall x = a \in D : \forall y G(a, y) = 1$. Здесь a – пробегает все элементы множества D . В частности, при $a = n$, получим $\forall y G(n, y) = 1$. Анализируя это последнее истинное

высказывание аналогично предыдущему, получим:
 $\forall y = b \in D: G(n, b) = 1$. В частности, при $b = m$ получим: $G(n, m) = 1$.
 Таким образом, мы получили, что предикат $G(x, y)$ на конкретном фиксированном наборе значений переменных $(x, y) = (n, m)$, с одной стороны, принимает значение «ложь» ($G(n, m) = 0$), и, с другой стороны, на этом же наборе значений переменных принимает значение «истина» ($G(n, m) = 1$). Поскольку предикат – это некоторая функция, а каждая функция на одном и том же наборе значений переменных не может принимать разные значения, то мы пришли к противоречию. Противоречие вызвано неверным допущением о том, что в некоторой интерпретации на каком-то наборе переменных исследуемая импликация ложна. Следовательно, в любой интерпретации импликация порождает тождественно истинный предикат, а это и означает, что она – тождественно истинная формула, что и следовало доказать.

Рассмотрим обратную импликацию $\forall y \forall x F \rightarrow \forall x \forall y F$ и докажем ее тождественную истинность. Рассмотрим произвольную ее интерпретацию $I = \langle AC; \varphi \rangle$ ($AC = \langle D; \Sigma_0 \cup \Sigma_\pi \rangle$) и значение рассматриваемой импликации на произвольном наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ значений ее свободных переменных. Получим некоторое высказывание. Предположим, что это высказывание ложно. Для упрощения дальнейших выкладок обозначим $F(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ как $G(x, y)$. Тогда имеем:

$$(\forall y \forall x G(x, y) \rightarrow \forall x \forall y G(x, y)) = 0.$$

Далее, по свойствам импликации, получим:

$$\begin{cases} \forall y \forall x G(x, y) = 1, \\ \forall x \forall y G(x, y) = 0. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{array}{l}
\forall x \forall y G(x,y) = 0 \Rightarrow \exists x=n \in D: \forall y G(n,y) = 0 \Rightarrow \exists y=m \in D: G(n,m) = 0 \\
\forall y \forall x G(x,y) = 1 \Rightarrow \forall y=b \in D: \forall x G(x,b) = 1 \\
\text{при } b=m: \forall x G(x,m) = 1 \Rightarrow \forall x=a \in D: G(a,m) = 1 \\
\text{при } a=n: G(n,m) = 1
\end{array}$$

Снова пришли к противоречию. Противоречие вызвано неверным допущением о том, что в некоторой интерпретации на каком-то наборе переменных исследуемая импликация ложна. Следовательно, в любой интерпретации импликация порождает тождественно истинный предикат, а это и означает, что она – тождественно истинная формула, что и следовало доказать.

Таким образом, закон перестановки кванторов общности доказан полностью.

Как видим, доказательство законов в логике предикатов на порядок сложнее, чем доказательство законов алгебры высказываний. Приходится вникать в содержательный смысл анализируемых высказываний, переформулировать ложные высказывания в истинные (заметим, что при таком переходе от ложных высказываний к истинным кванторы меняются на двойственные) и стремиться к выделению противоречия. Во многих случаях выделение подобного противоречия весьма затруднительно и тот факт, что оно не выделяется, свидетельствует лишь о том, что либо оно в принципе не может быть выделено, либо о том, что наших рассуждений недостаточно для его выделения.

В случае, когда противоречие не выделяется, следует попытаться задать конкретную интерпретацию, в которой исследуемая формула порождает опровержимый предикат (или ложное высказывание).

Пример 12.3. Доказать, что соседствующие в формуле разноименные кванторы переставлять местами нельзя, т.е.:

$$\forall x \exists y F \neq \exists y \forall x F.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $F = F(x,y)$ (смотри предыдущий пример). Проверим тождественную истинность прямой и обратной импликаций.

Рассмотрим прямую импликацию $\forall x \exists y F(x,y) \rightarrow \exists y \forall x F(x,y)$. Предположим, что она не является тождественно истинной. Тогда найдется такая ее интерпретация $I = \langle AC; \varphi \rangle$ ($AC = \langle D; \Sigma_0 \cup \Sigma_\pi \rangle$), в которой формула порождает ложное высказывание $\forall x \exists y F(x,y) \rightarrow \exists y \forall x F(x,y)$. Имеем:

$$\forall x \exists y F(x,y) \rightarrow \exists y \forall x F(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \exists y F(x,y) = 1, \\ \exists y \forall x F(x,y) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Перейдем во втором высказывании системы к истинному высказыванию, навешивая отрицание на обе части равносильности используя законы отрицания кванторов. Это целесообразно сделать, поскольку анализ истинных высказываний с кванторами не приводит к замене кванторов на двойственные. Получим:

$$\begin{cases} \forall x \exists y F(x,y) = 1 \Rightarrow \forall x = a \in D : \exists y F(a,y) = 1 \\ \forall y \exists x \overline{F(x,y)} = 1 \Rightarrow \forall y = b \in D : \exists x \overline{F(x,b)} = 1 \end{cases}$$

Заметим теперь, что истинное высказывание $\exists y F(a,y)$, утверждающее, что найдется в D такой элемент y на котором предикат $F(a,y)$ выполняется, утверждает это после того, как зафиксирован элемент $x=a$. Т.е. если изменить значение x на другое, то это повлечет за собой изменение и y на котором предикат $F(a,y)$ выполняется (для каждого x найдется свой y). Пусть $y = m$ такое, что $F(a,m)=1$. В истинном высказывании $\exists x \overline{F(x,b)}$ элемент b - произвольный элемент множества D , в частности он может совпадать с ранее зафиксированным в первом высказывании элементом m . Тогда получим $\exists x \overline{F(x,m)} = 1$. Откуда: $\exists x = n \in D : \overline{F(n,m)} = 1$, т.е. $F(n,m)=0$. В истинном высказывании $F(a,m)$ элемент a - произвольный элемент

множества D , но попытка его выбрать равным n в $F(a,m)=1$ в надежде прийти к противоречию с $F(n,m)=0$ приведет к замене m на другой элемент множества D (так как фиксация первого элемента x по смыслу высказывания «для любого x найдется соответствующий y такой, что предикат $F(x,y)$ выполняется» приводит в общем случае и к изменению y). Таким образом, противоречие, похоже, не выделяется. Зададим интерпретацию, в которой исходная импликация ложна. Для ее выбора систему

$$\begin{cases} \forall x \exists y F(x, y) = 1, \\ \exists y \forall x F(x, y) = 0. \end{cases}$$

можно рассматривать как подсказку для задания этой интерпретации – высказывание $\forall x \exists y F(x, y)$ в этой интерпретации должно быть истинным, а $\exists y \forall x F(x, y)$ – ложным. Пусть $I = \langle AC; \varphi \rangle$ и $AC = \langle \mathbb{R}; \{x+2y=0\} \rangle$. Тогда $\forall x \exists y (x+2y=0) = 1$, а $\exists y \forall x (x+2y=0) = 0$ и, тем самым, искомая интерпретация найдена.

Таким образом, исследуемая импликация тождественно истинной не является. Этого достаточно (обратную импликацию уже можно не исследовать на предмет тождественной истинности), чтобы сделать вывод о том, что закон перестановки разноименных кванторов не имеет места, т.е. разноименные кванторы, соседствующие в формуле, переставлять местами нельзя.

При доказательстве законов с относительными константами можно отойти от предложенной в предыдущих примерах схемы.

Пример 12.4. Доказать закон ($C - OK_x$):

$$\forall x F \wedge C = \forall x (F \wedge C).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную интерпретацию $I = \langle AC; \varphi \rangle$ ($AC = \langle D; \Sigma_0 \cup \Sigma_\pi \rangle$) и вычислим значения правой и левой части проверяемого тождества на произвольном наборе $\tilde{\alpha}$ значений свободных переменных. Если $C(\tilde{\alpha})=0$, то

$$(\forall xF \wedge C)(\tilde{\alpha}) = (\forall xF)(\tilde{\alpha}) \wedge C(\tilde{\alpha}) = (\forall xF)(\tilde{\alpha}) \wedge 0 = 0$$

$$\text{и } (\forall x(F \wedge C))(\tilde{\alpha}) = \forall x(F(\tilde{\alpha}') \wedge C(\tilde{\alpha})) = \forall x(F(\tilde{\alpha}') \wedge 0) = 0$$

(здесь и далее $\tilde{\alpha}'$ - набор, полученный из $\tilde{\alpha}$ удалением компоненты, соответствующей переменной x). Если же $C(\tilde{\alpha})=1$, то

$$(\forall xF \wedge C)(\tilde{\alpha}) = (\forall xF)(\tilde{\alpha}) \wedge C(\tilde{\alpha}) = (\forall xF)(\tilde{\alpha}) \wedge 1 = (\forall xF)(\tilde{\alpha}) = \forall xF(\tilde{\alpha}')$$

$$\text{и } (\forall x(F \wedge C))(\tilde{\alpha}) = \forall x(F(\tilde{\alpha}') \wedge C(\tilde{\alpha})) = \forall x(F(\tilde{\alpha}') \wedge 1) = \forall xF(\tilde{\alpha}').$$

Таким образом, значения правой и левой части проверяемого тождества, как предикатов, совпадают на любом наборе значений переменных. Следовательно, в любой интерпретации правая и левая части тождества равны, как предикаты. Значит, тождество доказано. Если C - не имеет свободных переменных, то в каждой интерпретации она сразу приобретает значение 0 или 1 и доказательство проводится аналогично предыдущему.

13. Предваренная нормальная форма

Как видим из предыдущих примеров, при анализе формул ЛП удобно, если все кванторы формулы расположены в самом начале формулы и их область действия распространяется до конца формулы. Введем в рассмотрение формулы такого вида.

Определение 13.1. *Формула логики предикатов не содержащая кванторов или такая, в которой все кванторы расположены в начале формулы и их область действия распространяется до конца формулы называется предваренной нормальной формой (ПНФ).*

Пример 13.1.

- 1) $\exists x \forall y Q(x, y, z) \rightarrow P(x, y)$ - не является ПНФ;
- 2) $\exists x \forall y \overline{Q(x, y, z)} \vee \forall x P(x, y)$ - не является ПНФ;
- 3) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, y, z) \vee P(x, y))$ - ПНФ;
- 4) $Q(x, y, z) \vee P(x, y)$ - ПНФ.

Определение 13.2. ПНФ, равносильная данной формуле F , называется ПНФ этой формулы (или для этой формулы) и обозначается $ПНФ(F)$.

Теорема 13.1. Для всякой формулы логики предикатов существует ее ПНФ.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. В качестве параметра индукции выберем количество n логических связок (операций) формулы.

База индукции. При $n = 0$ формула не содержит логических связок и, следовательно, не содержит кванторов. Такая формула в силу определения является ПНФ. Таким образом, утверждение теоремы в этом случае верное.

Предположение индукции. Предположим, что для всех формул ЛП с количеством логических связок $n \leq k$ существуют их ПНФ.

Шаг индукции. Пусть формула F содержит $n = k + 1$ логическую связку. Тогда для F возможен один из следующих вариантов: 1) $F = \bar{A}$; 2) $F = A \vee B$; 3) $F = A \wedge B$; 4) $F = A \rightarrow B$; 5) $F = A \leftrightarrow B$; 6) $\forall xA$; 7) $F = \exists xB$. Рассмотрим каждый из них.

1) Если $F = \bar{A}$, то A – содержит k логических связок и для нее существует $ПНФ(A)$ в силу предположения индукции. Тогда, применяя законы отрицания кванторов к $ПНФ(A)$ получим в итоге $ПНФ(F)$.

2) Если $F = A \vee B$, то подформулы A и B содержат не более k логических связок каждая и для них, в силу предположения индукции, существуют их ПНФ. Тогда $F = A \vee B = ПНФ(A) \vee ПНФ(B)$. Вынося теперь кванторы в начало формулы на основании законов вынесения кванторов, законов с относительными константами и применяя, если нужно, закон переобозначения связанных переменных, получим ПНФ исходной формулы.

3) Существование ПНФ исходной формулы доказывается аналогично предыдущему пункту 2).

4) Если $F = A \rightarrow B$, то $F = \bar{A} \vee B$ и доказательство существования ПНФ(F) сводится к использованию предыдущих случаев 1) и 3).

5) Если $F = A \leftrightarrow B$, то $F = \bar{A} \bar{B} \vee AB$ и доказательство существования ПНФ(F) сводится к использованию случаев 1), 3) и 2).

6) Если $F = \forall xA$, то у A в силу предположения индукции существует ее ПНФ(A), использование которой сразу приводит к ПНФ(F) = $\forall x(\text{ПНФ}(A))$.

7) Рассматривается аналогично пункту 6).

Шаг индукции доказан и, значит, теорема доказана полностью.

Пример 13.2. Построить ПНФ для формулы

$$F(y, z) = \forall x \exists y Q(x, y, z) \rightarrow \exists x \forall y R(x, y) \vee \exists z \exists x Q(x, y, z).$$

Решение. Поскольку законы вынесения кванторов сформулированы только для булевой тройки операций, то приведем формулу к виду, не содержащему других операций, кроме булевых. Имеем:

$$\begin{aligned} F(y, z) &= \forall x \exists y Q(x, y, z) \rightarrow \exists x \forall y R(x, y) \vee \exists z \exists x Q(x, y, z) = \\ &= \overline{\forall x \exists y Q(x, y, z)} \vee \exists x \forall y R(x, y) \vee \exists z \exists x Q(x, y, z) = \end{aligned}$$

Применим теперь последовательно законы отрицания кванторов. Получим:

$$= \exists x \forall y \overline{Q(x, y, z)} \vee \exists x \forall y R(x, y) \vee \exists z \exists x Q(x, y, z) =$$

Поменяем местами кванторы существования в последнем дизъюнктивном слагаемом (законы перестановки кванторов).

Получим:

$$= \exists x \forall y \overline{Q(x, y, z)} \vee \exists x \forall y R(x, y) \vee \exists x \exists z Q(x, y, z) =$$

Теперь можно квантор по переменной x вынести из дизъюнкции (законы вынесения кванторов). Получим:

$$= \exists x (\overline{\forall y Q(x, y, z)} \vee \forall y R(x, y) \vee \exists z Q(x, y, z)) =$$

Дальнейший порядок вынесения кванторов не регламентирован – их можно выносить в произвольном порядке. Вынесем их в порядке их расположения в последней формуле. Заметим, что первый квантор общности по переменной y вынести из последней подформулы (окаймленной скобками) нельзя, ибо последнее дизъюнктивное слагаемое не является относительной константой по y . Поэтому переобозначим y в том месте, где эта переменная связанная, на новую переменную, например на u . Получим:

$$= \exists x (\overline{\forall u Q(x, u, z)} \vee \forall y R(x, y) \vee \exists z Q(x, y, z)) =$$

Теперь квантор общности по переменной u можно вынести в начало формулы на основании законов с относительными константами. Получим:

$$= \exists x \forall u (\overline{Q(x, u, z)} \vee \forall y R(x, y) \vee \exists z Q(x, y, z)) =$$

Следующий квантор общности по переменной y вынести нельзя, ибо третье дизъюнктивное слагаемое в скобке не является относительной константой по y . Переобозначим y на новую переменную, например на v . Получим:

$$= \exists x \forall u (\overline{Q(x, u, z)} \vee \forall v R(x, v) \vee \exists z Q(x, y, z)) =$$

Теперь первое и третье дизъюнктивные слагаемые в скобке являются относительными константами по переменной v и квантор общности по v можно вынести на основании законов с относительными константами. Получим:

$$= \exists x \forall u \forall v (\overline{Q(x, u, z)} \vee R(x, v) \vee \exists z Q(x, y, z)) =$$

Осталось вынести квантор по z , но первое слагаемое в скобке не является относительной константой по z . Переобозначая переменную

z там, где она связанная, на t и вынося затем квантор существования по t окончательно получим:

$$\text{ПНФ}(F) = \exists x \forall u \forall v \exists t (\overline{Q(x, u, z)} \vee R(x, v) \vee Q(x, y, t)).$$

Заметим, что мы могли бы с самого начала пользоваться законами переобозначения связанных переменных и законами с относительными константами (это было бы правильно, но нерационально) и получить ПНФ с шестью кванторами в начале формулы. Кроме того, кванторы можно было бы выносить и в другом порядке. Это все свидетельствует о том, что *ПНФ для данной формулы определяется неоднозначно, а с точностью до количества кванторов в ПНФ, обозначения переменных и порядка расположения кванторов в ПНФ.*

14. Ограниченные кванторы

В математике при записи математических выражений наряду с кванторами предыдущего типа (будем называть их *простыми*) используются кванторы *ограниченные*. Ограниченные кванторы используются в том случае, когда нужно подчеркнуть, что высказывания, формируемые с помощью кванторов, касаются элементов не всей области определения предиката, а формулируются для элементов некоторого подмножества этой области определения, т.е. для элементов, обладающих некоторым свойством. Ограниченные кванторы применяются и в случае использования полиморфных предикатов (когда переменные предиката изменяются в разных множествах и нужно для всякой переменной подчеркнуть то множество, на котором эта переменная определена). Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – некоторые предикаты в какой-то области. Тогда $\forall_{P(x)} x Q(x)$ – высказывание, утверждающее, что «для любого x с условием (или под условием) $P(x)$ выполняется $Q(x)$ ». Аналогично $\exists_{P(x)} x Q(x)$ –

высказывание, утверждающее, что «найдется такой элемент x с условием (удовлетворяющий условию) $P(x)$, для которого выполняется $Q(x)$ ». Кванторы, используемые при записи выражений $\forall_{P(x)} Q(x)$ и $\exists_{P(x)} Q(x)$ называются ограниченными. Их точное определение с помощью простых кванторов следующее:

Определение 14.1.

$$\forall_{P(x)} Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),$$

$$\exists_{P(x)} Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x(P(x) \wedge Q(x)).$$

Пример 14.1. Напомним определение предела числовой последовательности: «Число A называется пределом числовой последовательности x_n при n стремящемся в бесконечность, если для любого (сколь угодно малого) положительного действительного числа ε найдется такое натуральное число M зависящее от ε , что для всех натуральных значений $n \geq M$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ ». Записать это определение символически, без использования слов русского языка.

Решение. Имеем (здесь R – множество действительных чисел, а N – множество натуральных чисел):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \stackrel{\text{def}}{=} (\forall_{\varepsilon \in R \wedge \varepsilon > 0}) (\exists_{M = M(\varepsilon) \wedge M \in N}) (\forall_{n \in N \wedge n \geq M}) [|x_n - A| < \varepsilon].$$

Очень часто условие, ограничивающее изменение переменной, в ограниченном кванторе вносится под сам квантор (выполняется требование «линеаризации» информации). Предыдущее наше определение имело бы тогда следующий вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \stackrel{\text{def}}{=} <$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon \in R \wedge \varepsilon > 0) (\exists M = M(\varepsilon) \in N) (\forall n \in N \wedge n \geq M) [|x_n - A| < \varepsilon].$$

Для ограниченных кванторов справедливы все основные законы, сформулированные для кванторов простых. Их доказательство основывается на справедливости законов с простыми кванторами и на определении кванторов ограниченных.

Пример 14.2. Доказать закон вынесения ограниченного квантора существования из дизъюнкции, т.е.

$$\exists_{P(x)} Q(x) \vee \exists_{P(x)} R(x) = \exists_{P(x)} (Q(x) \vee R(x)).$$

Решение. Имеем:

$$\exists_{P(x)} Q(x) \vee \exists_{P(x)} R(x) = \exists_{P(x)} (P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists_{P(x)} (P(x) \wedge R(x)) =$$

Воспользуемся законом вынесения простого квантора существования из дизъюнкции. Получим:

$$= \exists_{P(x)} (P(x)Q(x) \vee P(x)R(x)) =$$

Далее, на основании первого дистрибутивного закона, известного еще в алгебре высказываний, вынесем $P(x)$ в ядре за скобки и воспользуемся определением ограниченного квантора существования. Получим:

$$= \exists_{P(x)} [P(x) \wedge (Q(x) \vee R(x))] = \exists_{P(x)} (Q(x) \vee R(x)).$$

Что и требовалось доказать.

Пример 14.3. Доказать закон с относительными константами для ограниченного квантора общности и дизъюнкции, т.е.

$$\forall_{P(x)} F(x) \vee C = \forall_{P(x)} (F(x) \vee C).$$

Решение. На основании определения ограниченного квантора общности имеем:

$$\forall_{P(x)} F(x) \vee C = \forall_{P(x)} (P(x) \rightarrow F(x)) \vee C =$$

Теперь на основании закона с относительными константами для простого квантора общности и дизъюнкции, получим:

$$= \forall_{P(x)} [(P(x) \rightarrow F(x)) \vee C] = \forall_{P(x)} [(\overline{P(x)} \vee F(x)) \vee C] =$$

Теперь на основании закона ассоциативности дизъюнкции переставим скобки в ядре и получим, используя определение ограниченного квантора общности:

$$= \forall x[\overline{P(x)} \vee (F(x) \vee C)] = \forall x[P(x) \rightarrow (F(x) \vee C)] = \forall x \underset{P(x)}{(F(x) \vee C)}.$$

Что и требовалось доказать.

15. Логическое следствие в ЛП. Рассуждения в ЛП

Понятие логического следствия в ЛП можно определить по аналогии с АВ с помощью интерпретаций, однако примем в качестве определения аналог бывшего критерия логического следствия в АВ:

Определение 15.1 *Формула F называется логическим следствием совокупности формул A_1, A_2, \dots, A_n , если соответствующая импликация $(A_1 \ A_2 \dots \ A_n \rightarrow F)$ является формулой тождественно истинной. Обозначается логическое следствие так же, как и в алгебре высказываний. Таким образом:*

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vDash F \stackrel{def}{=} \vDash (A_1 \ A_2 \dots \ A_n \rightarrow F).$$

Все теоремы - свойства логического следствия, доказанные в алгебре высказываний, остаются справедливыми и в логике предикатов (правило перестановки посылок, закон контрапозиции, правило дедукции, транзитивность логического следствия). Убедитесь в этом самостоятельно.

Так же из АВ в ЛП переносится понятие рассуждения, схемы рассуждения, правильного рассуждения - только с расширенным пониманием формул и законов.

Пример 15.1. Проанализируйте следующее рассуждение.

«Марк был римлянином. Цезарь был диктатором. Те римляне, которые ненавидели диктатора, пытались убить его. Римляне либо были преданы диктатору, либо ненавидели его. Марк не был предан Цезарю. Следовательно, Марк пытался убить Цезаря».

Решение. Составим схему этого рассуждения, формализовав посылки и заключение. Для этого, в отличие от алгебры высказываний, выделим элементарные предикаты, которые обеспечат нам формулировку высказываний рассуждения. Имеем:

$R(x) :=$ « x – римлянин»;

$D(z) :=$ « z – диктатор»;

$N(x,z) :=$ « x ненавидит z »;

$P(x,z) :=$ « x предан z »

$U(x,z) :=$ « x пытался убить z ».

Пусть еще константа m обозначает конкретного человека – Марка, а константа c – Цезаря. Тогда посылки нашего рассуждения формализуются следующим образом:

«Марк был римлянином» - $R(m)$;

«Цезарь был диктатором» - $D(c)$;

«Те римляне, которые ненавидели диктатора, пытались убить его» -

$$\forall_{R(x)} \forall_{D(z)} [N(x, z) \rightarrow U(x, z)];$$

«Римляне либо были преданы диктатору, либо ненавидели его» -

$$\forall_{R(x)} \forall_{D(z)} [P(x, z) + N(x, z)]$$

(при формализации этого высказывания учли, что «или» в этом высказывании – исключающее (разделительное) и потому передается отрицанием эквиваленции (сложением по модулю два));

«Марк не был предан Цезарю» - $\overline{P(m,c)}$;

«Марк пытался убить Цезаря» - $U(m,c)$.

Тогда схема рассуждения имеет вид:

$$\frac{R(m), D(c), \overline{P(m,c)}, \forall_{R(x)} \forall_{D(z)} [N(x, z) \rightarrow U(x, z)], \forall_{R(x)} \forall_{D(z)} [P(x, z) + N(x, z)]}{U(m,c)}.$$

Рассуждение правильное, если оно ведется по правильной схеме. Схема, в свою очередь правильная, если заключение является логическим следствием посылок, а это имеет место, если соответствующая импликация – тождественно истинная. Составим эту импликацию. Имеем:

$$R(m) \wedge D(c) \wedge \overline{P(m,c)} \wedge \forall_{R(x)D(z)} x \forall z [N(x,z) \rightarrow U(x,z)] \wedge \forall_{R(x)D(z)} x \forall z [P(x,z) + N(x,z)] \rightarrow \rightarrow U(m,c).$$

Заметим, что в последней формуле ограниченные кванторы общности можно вынести за скобки из четвертого и пятого конъюнктивных множителей. Получим:

$$R(m) \wedge D(c) \wedge \overline{P(m,c)} \wedge \forall_{R(x)D(z)} x \forall z ([N(x,z) \rightarrow U(x,z)] \wedge [P(x,z) + N(x,z)]) \rightarrow \rightarrow U(m,c).$$

Предположим, что существует интерпретация $I = \langle AC; \varphi \rangle$ ($AC = \langle M; \Sigma_0 \cup \Sigma_\pi \rangle$), в которой исследуемая импликация ложна (она замкнута и в каждой интерпретации порождает высказывание). Тогда придем к системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} R(m) = 1, \\ D(c) = 1, \\ P(m,c) = 0, \\ U(m,c) = 0 \\ \forall_{R(x)D(z)} x \forall z ([N(x,z) \rightarrow U(x,z)] \wedge [P(x,z) + N(x,z)]) = 1 \end{array} \right.$$

Имеем:

$$\forall_{R(x)D(z)} x \forall z ([N(x,z) \rightarrow U(x,z)] \wedge [P(x,z) + N(x,z)]) = 1 \Rightarrow$$

$$\forall x (R(x) \rightarrow \forall_{D(z)} z ([N(x,z) \rightarrow U(x,z)] \wedge [P(x,z) + N(x,z)])) = 1 \Rightarrow$$

$$\forall x = a \in M : (R(a) \rightarrow \forall_{D(z)} z ([N(a,z) \rightarrow U(a,z)] \wedge [P(a,z) + N(a,z)])) = 1 \Rightarrow$$

Поскольку элемент a – произвольный элемент основы интерпретации, то он может, в частности, равняться m . При этом значении a получим:

$$(R(m) \rightarrow \forall_{D(z)} ([N(m, z) \rightarrow U(m, z)] \wedge [P(m, z) + N(m, z)])) = 1.$$

Учтем, что $R(m)=1$ в рамках нашей системы. А потому:

$$\forall_{D(z)} ([N(m, z) \rightarrow U(m, z)] \wedge [P(m, z) + N(m, z)]) = 1.$$

Или:

$$\forall z (D(z) \rightarrow [N(m, z) \rightarrow U(m, z)] \wedge [P(m, z) + N(m, z)]) = 1.$$

Т.е.:

$$\forall z = b \in M : (D(b) \rightarrow [N(m, b) \rightarrow U(m, b)] \wedge [P(m, b) + N(m, b)]) = 1.$$

При $b=c$ получим:

$$(D(c) \rightarrow [N(m, c) \rightarrow U(m, c)] \wedge [P(m, c) + N(m, c)]) = 1.$$

Поскольку в рамках системы $D(c)=1$, то получим:

$$[N(m, c) \rightarrow U(m, c)] \wedge [P(m, c) + N(m, c)] = 1.$$

Откуда : $[N(m, c) \rightarrow U(m, c)] = 1$ и $[P(m, c) + N(m, c)] = 1$.

Из $[P(m, c) + N(m, c)] = 1$, учитывая, что в рамках системы $P(m, c)=0$, получим, $N(m, c) = 1$. Тогда из $N(m, c) = 1$, $U(m, c) = 0$ и $[N(m, c) \rightarrow U(m, c)] = 1$ придем к противоречию $(1 \rightarrow 0) = 1 \neq 1$.

Таким образом, наше предположение о существовании интерпретации, в которой исследуемая импликация ложна – неверно и она истинна в любой интерпретации, т.е. тождественно истинная. Но тогда схема рассуждения – правильная и, следовательно, исходное рассуждение – правильное.

Задачи для самостоятельного решения

Алгебра высказываний

Задача 1. Построить таблицы Квайна для следующих формул и на основании таблиц провести классификацию формул:

1. $f_1(x, y, z) = \bar{x}y \leftrightarrow (y \vee \bar{z} \rightarrow xz)$;
2. $f_2(x, y, z) = (x\bar{y} + \bar{z}) \rightarrow (\bar{x} \vee y \leftrightarrow z)$;

$$3. f_3(x, y, z) = ((\bar{x} \vee \bar{y}) / \bar{z}) + (x \vee \bar{y}z \rightarrow \bar{x}y);$$

$$4. f_4(x, y, z) = (\bar{x} \vee y)(y \vee \bar{z}) \rightarrow ((x \rightarrow \bar{y}) + \bar{z});$$

Задача 2. Построить ДНФ для формул предыдущей задачи.

Задача 3. Формализовать рассуждение и проверить его правильность, составив схему рассуждения:

1) Если бы он не сказал ей, она бы и не узнала. А не спроси она его, он и не сказал бы ей. Но она узнала. Следовательно, она спросила.

2) Если верно, что дифференцируемая функция непрерывна, то невозможно, чтобы функция была дифференцируема и разрывна.

3) Если верно, что невырожденная матрица имеет обратную, то также справедливо, что матрица либо вырождена, либо имеет обратную.

4) Известно, что хроничные сепульки всегда латентны или бифуркальны. Какие из следующих утверждений в этом случае истинны?

а) сепульки не хроничны только в случае отсутствия у них свойства латентности;

б) латентность сепулек не является необходимым условием их хроничности или бифуркальности;

в) сепульки бифуркальны только в случае их хроничности либо латентности;

г) хроничность сепулек является достаточным условием их латентности или бифуркальности;

д) для того, чтобы сепульки были бифуркальны, достаточно только, чтобы они были хроничны;

е) для нехроничности сепулек необходимо отсутствие у них как бифуркальности, так и латентности.

Задача 4. Мистер Мак Грегор, владелец лавки из Лондона, сообщил в Скотланд-Ярд, что его ограбили. По обвинению владельца лавки были арестованы три подозрительные личности – Браун, Джонс и Смит (Б, Д, С). На основании показаний Мак Грегора, данных под присягой, было установлено, что:

а) каждый из подозреваемых Б, Д и С в день ограбления был в лавке и никто туда больше не заходил;

Следующие факты были неопровержимо установлены следствием:

б) если Б виновен, то у него был ровно один сообщник;

в) если Д невиновен, то С тоже невиновен;

г) если виновны ровно двое подозреваемых, то Б один из них;

д) если С невиновен, то Д тоже невиновен.

Против кого было выдвинуто обвинение?

Задача 5. Инспектора Крейга из Скотланд-Ярда направили для проверки лечебницы для умалишенных. Каждый из обитателей больницы (врач или пациент) мог быть либо здоров, либо лишен рассудка. Если он был здоров, то говорил правду, а если болен, то только лгал.

В лечебнице Крейг побеседовал с двумя первыми попавшимися обитателями: первый сказал, что второй – пациент, а второй сказал, что первый – доктор. Поразмыслив, инспектор догадался, что в клинике или есть доктора, лишенные рассудка, или пациенты, которые нормальны. Как он догадался об этом?

Логика предикатов

Задача 6. Классифицируйте предикат $P(x,y):=(x^2+y^2=16)$, заданный на множестве \mathbb{Z} целых чисел.

Задача 7. Навешиванием кванторов по обоим переменным на предикат $P(x,y):=[(x-3)(y+3)<x^2]$, заданный на множестве \mathbb{R}

действительных чисел, сформулируйте различные высказывания и определите их истинность.

Задача 8. Классифицируйте следующую формулу логики предикатов:

$$\exists x \forall y [Q(x,y) \rightarrow \forall z R(x,y,z)].$$

Задача 9. Приведите формулу к ПНФ, которая содержала бы минимальное возможное количество кванторов:

$$\exists y \forall z \forall x P(x,y,z) \rightarrow \exists x \forall y \exists z Q(x,y,z) \wedge \forall z \forall y R(x,y,z).$$

Задача 10. Сформулируйте символически определение линейно зависимой системы векторов некоторого линейного пространства: «Система векторов данного линейного пространства называется линейно зависимой, если существует такой ненулевой набор чисел основного поля, что линейная комбинация векторов этой системы с коэффициентами - соответствующими компонентами набора чисел, равна нулевому вектору пространства».

Задача 11. Формализуйте рассуждение и проверьте его правильность:

Если всякий разумный философ – циник и только женщины являются разумными философами, то тогда, если существуют разумные философы, некоторые из женщин – циники.

Задача 12. Формализуйте рассуждение и проверьте его правильность:

Никакой торговец сепульками сам их не покупает. Некоторые люди, покупающие сепульки, глупы. Следовательно, некоторые глупые люди не торгуют сепульками.

Ответы

Алгебра высказываний

Задача 1. Таблицы Квайна, классификация формул.

$$f_1 : 10001010. \quad f_1 \in \text{ВП}; \quad f_1 \in \text{ОП}; \quad f_1 \notin \text{ТИ}; \quad f_1 \notin \text{ТЛ}.$$

$$f_2 : 01011001. \quad f_2 \in \text{ВП}; \quad f_2 \in \text{ОП}; \quad f_2 \notin \text{ТИ}; \quad f_2 \notin \text{ТЛ}.$$

$$f_3 : 11100111. \quad f_3 \in \text{ВП}; \quad f_3 \in \text{ОП}; \quad f_3 \notin \text{ТИ}; \quad f_3 \notin \text{ТЛ}.$$

3). Формализуем рассуждение. Введем в рассмотрение атомарные высказывания:

A:= «Матрица невырожденная»;

B:= «Матрица имеет обратную»;

Схема рассуждения: $\frac{A \rightarrow B}{A \vee B}$ - правильная. Следовательно, рассуждение правильное.

4). Формализуем условия задачи. Введем в рассмотрение атомарные высказывания:

X:= «Сепульки - хроничны»;

B:= «Сепульки - бифуркальны»;

L:= «Сепульки - латентны».

Тогда условие задачи формализуется формулой $X \rightarrow B \vee L$.

4а). Утверждение а) формализуется формулой $\bar{X} \rightarrow \bar{L}$. В предположении истинности формулы $X \rightarrow B \vee L$ формула $\bar{X} \rightarrow \bar{L}$ истинна, если схема $\frac{X \rightarrow B \vee L}{\bar{X} \rightarrow \bar{L}}$ - правильная. Эта схема - неверная.

Следовательно, утверждение а) неверно, если истинно условие задачи.

4б). Утверждение б) не является истинным, т.к. схема $\frac{X \rightarrow B \vee L}{X \vee B \rightarrow L}$ - неправильная.

4в). Утверждение в) не является истинным, т.к. схема $\frac{X \rightarrow B \vee L}{X \vee B \rightarrow L}$ - неправильная.

4г). Утверждение г) является истинным, т.к. схема $\frac{X \rightarrow B \vee L}{X \rightarrow L \vee B}$ - правильная.

4д). Утверждение д) ложно, т.к. схема $\frac{X \rightarrow B \vee L}{X \rightarrow B}$ -

неправильная.

4е). Утверждение е) не является истинным, т.к. схема $\frac{X \rightarrow B \vee L}{X \rightarrow \overline{B} \overline{L}}$ - неправильная.

Задача 4. В этой задаче нам известны некоторые исходные данные (посылки) и нет заключения (вывода, следствия этих данных). Самым сильным следствием данной совокупности посылок является их конъюнкция. Поэтому формализуем исходные данные и построим их конъюнкцию в качестве следствия. Введем в рассмотрение атомарные высказывания:

D:= «Виновен Джонс»;

B:= «Виновен Браун»;

C:= «Виновен Смит».

Тогда имеем:

$$(D \vee B \vee C)(B \rightarrow D + C)(\overline{D} \rightarrow \overline{C})(BD + BC)(\overline{C} \rightarrow \overline{D}) = \dots = 0.$$

Итак, самым сильным следствием данной совокупности посылок является «ложь». Это свидетельствует о том, что среди посылок есть ложная посылка (ложь из истины следовать не может). Поскольку все посылки, начиная со второй, неопровержимо установлены следствием, то ложной может быть только первая посылка. Таким образом, мистер Мак Грегор соврал. Значит, виновен он и ему было выдвинуто обвинение.

Задача 5. Формализуем задачу. Инспектору Крейгу в лечебнице встретились два человека - X и Y. Введем в рассмотрение четыре высказывания:

X_d := «X - доктор»;

X_n := «X - здоров (нормальный)»;

$Y_D := \langle Y - \text{доктор} \rangle;$

$Y_H := \langle Y - \text{здоров (нормальный)} \rangle.$

Как помним, здоровые люди говорят только правду, а нездоровые – только лгут. Первый встреченный инспектором человек сказал, что второй – пациент. Если он был здоров, то он сказал правду, а если болен – солгал. Поэтому имеем две посылки: $X_H \rightarrow Y_H$ и $\overline{X_H} \rightarrow \overline{Y_H}$. Аналогично, заявление второго обитателя лечебницы (первый – доктор) порождает две посылки: $Y_H \rightarrow X_D$ и $\overline{Y_H} \rightarrow \overline{X_D}$. Построим в качестве самого сильного следствия данной совокупности посылок их конъюнкцию. Имеем:

$$\begin{aligned} & (X_H \rightarrow Y_H)(\overline{X_H} \rightarrow \overline{Y_H})(Y_H \rightarrow X_D)(\overline{Y_H} \rightarrow \overline{X_D}) = \\ & = (\overline{X_H} \vee Y_H)(X_H \vee \overline{Y_H})(\overline{Y_H} \vee X_D)(Y_H \vee \overline{X_D}) = \\ & = (\overline{X_H} \overline{Y_H} \vee X_H Y_H)(\overline{X_D} \overline{Y_H} \vee X_D Y_H) = \\ & = \overline{X_H} \overline{Y_H} \overline{X_D} \overline{Y_H} \vee \overline{X_H} \overline{Y_H} X_D Y_H \vee X_H Y_H \overline{X_D} \overline{Y_H} \vee X_H Y_H X_D Y_H. \end{aligned}$$

Первое слагаемое свидетельствует о том, что среди докторов ($\overline{Y_H}$) есть умалишенные ($\overline{X_H}$). Второе слагаемое свидетельствует о том же: среди докторов (X_D) есть умалишенные ($\overline{X_H}$). Третье слагаемое свидетельствует о том, что среди пациентов ($\overline{X_D}$) есть нормальные (здоровые) люди (X_H). Четвертое слагаемое свидетельствует о том, что среди пациентов (Y_H) есть нормальные люди (Y_H).

Во всех случаях в лечебнице далеко не все в порядке.

Логика предикатов

Задача 6. Предикат $P(x,y) := (x^2 + y^2 = 16)$ на множестве \mathbb{Z} целых чисел:

- выполнимый ($P(x,y) \in ВП$), т.к. существует набор значений его переменных (например, $(0,4) \in \mathbb{Z}^2$), на котором этот предикат принимает значение «истина»;

- в силу выполнимости предиката, он не может быть тождественно ложным ($P(x,y) \notin ТЛ$);

- опровержимый ($P(x,y) \in ОП$), т.к. существует набор значений его переменных (например, $(2,2) \in \mathbb{Z}^2$), на котором этот предикат принимает значение «ложь»;

- в силу опровержимости предиката, он не может быть тождественно истинным ($P(x,y) \notin ТИ$).

Задача 7.

$$\forall x \forall y [(x-3)(y+3) < x^2] = 0;$$

$$\forall x \exists y [(x-3)(y+3) < x^2] = 1;$$

$$\exists x \exists y [(x-3)(y+3) < x^2] = 1;$$

$$\exists x \forall y [(x-3)(y+3) < x^2] = 0;$$

$$\exists y \forall x [(x-3)(y+3) < x^2] = 0;$$

$$\forall y \exists x [(x-3)(y+3) < x^2] = 1.$$

Задача 8. В формуле все переменные – связанные. Поэтому в каждой интерпретации исходная формула порождает высказывание:

$$\exists x \forall y [Q(x,y) \rightarrow \forall z R(x,y,z)].$$

Мы уже отмечали ранее, что проще анализировать формулы, представленные в виде ПНФ. Приведем формулу к ПНФ. Имеем:

$$\begin{aligned} \exists x \forall y (Q(x,y) \rightarrow \forall z R(x,y,z)) &= \exists x \forall y (\overline{Q(x,y)} \vee \forall z R(x,y,z)) = \\ &= \exists x \forall y \forall z (\overline{Q(x,y)} \vee R(x,y,z)) \end{aligned}$$

1) Зададим, например, следующую интерпретацию: $I = \langle AC; \varphi \rangle$, где $AC = \langle \mathbb{Z}; \{x^2 + y^2 \geq 0; x^2 + y^2 + z^2 < 0\} \rangle$. В этой интерпретации получим ложное высказывание

$$\exists x \forall y \forall z [(x^2 + y^2 < 0) \vee (x^2 + y^2 + z^2 < 0)].$$

Таким образом, исходная формула – опровержимая и, следовательно, не является тождественно истинной.

2) В интерпретации $I = \langle AC; \varphi \rangle$, где $AC = \langle \mathbb{Z}; \{x^2+y^2 < 0; x^2+y^2+z^2 \geq 0\} \rangle$, высказывание

$$\exists x \forall y \forall z [(x^2+y^2 \geq 0) \vee (x^2+y^2+z^2 \geq 0)]$$

истинное. Поэтому исходная формула – выполнимая и, следовательно, не является тождественно ложной.

Задача 9. На первом шаге построения ПНФ необходимо избавиться в формуле от небулевых операций и их отрицаний. Имеем:

$$\begin{aligned} \exists y \forall z \forall x P(x, y, z) \rightarrow \exists x \forall y \exists z Q(x, y, z) \wedge \forall z \forall y R(x, y, z) &= \\ = \overline{\exists y \forall z \forall x P(x, y, z)} \vee \exists x \forall y \exists z Q(x, y, z) \wedge \forall y \forall z R(x, y, z) &= \end{aligned}$$

Воспользуемся законами отрицания кванторов. Получим:

$$= \forall y \exists z \exists x \overline{P(x, y, z)} \vee \exists x \forall y \exists z Q(x, y, z) \wedge \forall y \forall z R(x, y, z) =$$

Далее, вынесем за скобки первый квантор общности по y (это можно сделать, ибо вторая и третья подформулы ядра являются относительно константами по переменной y) и поменяем местами рядом стоящие кванторы существования в первом дизъюнктивном слагаемом. Получим:

$$= \forall y [\exists x \exists z \overline{P(x, y, z)} \vee \exists x \forall y \exists z Q(x, y, z) \wedge \forall y \forall z R(x, y, z)] =$$

Переобозначим переменную x в первых двух подформулах ядра последней формулы. Получим:

$$= \forall y [\exists u \exists z \overline{P(u, y, z)} \vee \exists u \forall y \exists z Q(u, y, z) \wedge \forall y \forall z R(x, y, z)] =$$

Вынесем сначала квантор существования по переменной u на основании законов с относительно константами из второй и третьей подформулы ядра, а затем этот же квантор вынесем в начало формулы на основании закона вынесения квантора существования из дизъюнкции. Получим:

$$= \forall y \exists u [\exists z \overline{P(u, y, z)} \vee \forall y \exists z Q(u, y, z) \wedge \forall y \forall z R(x, y, z)] =$$

Переобозначим переменную y во второй и третьей подформулах ядра на одну и ту же переменную v и вынесем квантор общности по v сначала из второй и третьей подформул ядра на основании закона вынесения квантора общности из конъюнкции, а затем и в начало всей формулы на основании законов с относительными константами. Получим:

$$= \forall y \exists u \forall v [\overline{\exists z P(u, y, z)} \vee \exists z Q(u, v, z) \wedge \forall z R(x, v, z)] =$$

Аналогично предыдущему шагу вынесем квантор существования в начало формулы. Получим:

$$= \forall y \exists u \forall v \exists t [P(u, y, t) \vee Q(u, v, t) \wedge \forall z R(x, v, z)] =$$

Вынося теперь последний квантор по переменной z на основании законов с относительными константами, окончательно получим:

$$= \forall y \exists u \forall v \exists t \forall z [\overline{P(u, y, t)} \vee Q(u, v, t) \wedge R(x, v, z)].$$

Задача 10. Пусть X - линейное пространство над полем P . Тогда:

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} - \text{ЛЗ} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \tilde{\alpha} : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \quad (\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)).$$

Задача 11. Формализуйте рассуждение и проверьте его правильность:

Если всякий разумный философ - циник и только женщины являются разумными философами, то тогда, если существуют разумные философы, некоторые из женщин - циники.

Решение. Введем в рассмотрение следующие элементарные одноместные предикаты:

$\Phi(x) :=$ « x - разумный философ»;

$\Psi(x) :=$ « x - циник»;

$\mathcal{J}(x) :=$ « x - женщина».

Тогда схема рассуждения следующая:

$$\frac{\forall x_{\Phi(x)} \Psi(x), \forall x_{\Phi(x)} \mathcal{J}(x)}{\exists x \Phi(x) \rightarrow \exists x_{\mathcal{J}(x)} \Psi(x)}.$$

Проверим правильность этой семы. Составим соответствующую импликацию и проверим ее тождественную истинность. Имеем:

$$\forall_{\Phi(x)} x \mathcal{I}(x) \wedge \forall_{\Phi(x)} x \mathcal{K}(x) \rightarrow (\exists x \Phi(x) \rightarrow \exists_{\mathcal{K}(x)} x \mathcal{I}(x)).$$

Предположим, что найдется интерпретация, в которой импликация (она – замкнутая формула) – ложна. Тогда, в итоге, получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall_{\Phi(x)} x \mathcal{I}(x) = 1, \\ \forall_{\Phi(x)} x \mathcal{K}(x) = 1, \\ \exists x \Phi(x) = 1, \\ \exists_{\mathcal{K}(x)} x \mathcal{I}(x) = 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x (\Phi(x) \rightarrow \mathcal{I}(x)) = 1, \\ \forall x (\Phi(x) \rightarrow \mathcal{K}(x)) = 1, \\ \exists x \Phi(x) = 1, \\ \exists x (\mathcal{K}(x) \wedge \mathcal{I}(x)) = 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x (\Phi(x) \rightarrow \mathcal{I}(x)) = 1, \\ \forall x (\Phi(x) \rightarrow \mathcal{K}(x)) = 1, \\ \exists x \Phi(x) = 1, \\ \forall x (\overline{\mathcal{K}(x)} \vee \overline{\mathcal{I}(x)}) = 1. \end{array} \right.$$

В системе только третье высказывание связано с квантором существования. Проанализируем его. Имеем:

$$\exists x \Phi(x) = 1 \Rightarrow \exists x = m \in D : \Phi(m) = 1 \text{ (} D \text{ – область интерпретации)}.$$

Далее: $\forall x (\Phi(x) \rightarrow \mathcal{I}(x)) = 1 \Rightarrow \forall x = a \in D : (\Phi(a) \rightarrow \mathcal{I}(a)) = 1$. В силу того, что a – произвольный элемент множества D , то a можно положить равным m . Тогда получим: $\Phi(m) \rightarrow \mathcal{I}(m) = 1$. Учитывая, что $\Phi(m) = 1$ (нашли раньше), получим: $\mathcal{I}(m) = 1$. Теперь из последнего высказывания системы, аналогичным образом получим $\mathcal{K}(m) = 0$.

В итоге, из второго высказывания системы и ранее полученных

результатов, имеем:
$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(m) \rightarrow \mathcal{K}(m) = 1, \\ \mathcal{K}(m) = 0, \\ \Phi(m) = 1. \end{array} \right. \quad \zeta$$

Противоречие. Следовательно, исходное рассуждение - правильное.

Задача 12. Формализуйте рассуждение и проверьте его правильность:
Никакой торговец сепульками сам их не покупает. Некоторые люди, покупающие сепульки, глупы. Следовательно, некоторые глупые люди не торгуют сепульками.

Решение. Введем в рассмотрение следующие элементарные одноместные предикаты:

$$T(x) := \langle \text{«}x \text{ – торговец сепульками} \rangle;$$

$\Pi(x) := \langle x - \text{покупатель сепулек} \rangle;$

$\Gamma(x) := \langle x - \text{глупый человек} \rangle.$

Схема рассуждения:
$$\frac{\frac{\forall x \overline{\Pi(x)}, \exists x \Gamma(x)}{\Gamma(x)}}{\exists x \overline{T(x)}}.$$

Проверим правильность этой семы. Составим соответствующую импликацию и проверим ее тождественную истинность. Имеем:

$$\frac{\forall x \overline{\Pi(x)} \wedge \exists x \Gamma(x)}{\Gamma(x)} \rightarrow \frac{\exists x \overline{T(x)}}{\Gamma(x)}.$$

Предположим, что найдется интерпретация, в которой импликация (она – замкнутая формула) – ложна. Тогда, в итоге, получим систему:

$$\begin{cases} \forall x (T(x) \rightarrow \overline{\Pi(x)}) = 1, \\ \exists x (\Pi(x) \wedge \Gamma(x)) = 1, \\ \exists x (\Gamma(x) \wedge \overline{T(x)}) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x (T(x) \rightarrow \overline{\Pi(x)}) = 1, \\ \exists x (\Pi(x) \wedge \Gamma(x)) = 1, \\ \forall x (\overline{\Gamma(x)} \vee T(x)) = 1. \end{cases}$$

Проанализируем второе высказывание системы. Имеем:

$$\exists x (\Pi(x) \wedge \Gamma(x)) = 1 \Rightarrow \exists x = m \in D : (\Pi(m) \wedge \Gamma(m)) = 1 \Rightarrow \Pi(m) = 1 \wedge \Gamma(m) = 1.$$

Далее, из первого высказывания системы получим:

$$\forall x (T(x) \rightarrow \overline{\Pi(x)}) = 1 \Rightarrow \forall x = a \in D : (T(a) \rightarrow \overline{\Pi(a)}) = 1. \text{ При } a = m \text{ получим:}$$

$T(m) \rightarrow \overline{\Pi(m)} = 1$. Учитывая $\Pi(m) = 1$, имеем: $T(m) = 0$. Наконец, анализ последнего высказывания системы

$\forall x (\overline{\Gamma(x)} \vee T(x)) = 1 \Rightarrow \forall x = a \in D : (\overline{\Gamma(a)} \vee T(a)) = 1$ при $a = m$ приведет с учетом предыдущего к противоречивой системе:

$$\begin{cases} \overline{\Gamma(m)} \vee T(m) = 1, \\ \Gamma(m) = 1, \\ T(m) = 0. \end{cases} \quad \text{↯.}$$

Следовательно, в итоге, исходное рассуждение - правильное.

Список использованной литературы

1. В. И. Игошин. Математическая логика и теория алгоритмов. М. : Академия, 2008. – 448 с.
2. В. И. Игошин. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. М. : Академия, 2007. – 304 с.
3. С. Д. Шаповрев. Математическая логика (курс лекций и практических занятий). С.-П. : БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
4. В. Н. Мельников. Логические задачи. Киев-Одесса: Вища школа, 1989. – 344 с.
5. Ю. Г. Карпов. Теория автоматов. М. : Питер, 2002. – 224 с.

Навчальне видання

Драган Григорій Сильвестрович

Федоровський Сергій Васильович

Елементи алгебри висловлень і логіки предикатів
Навчально-методичний посібник для студентів першого курсу
напряму підготовки 040301 «Прикладна математика»

За редакцією авторів

Російською мовою

Підп. до друку 22.04.2014. Формат 60x84/16.

Умов.-друк.арк. 5,81. Тираж 50.

Зам. № 911.

Видавець і виготовлювач

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12

Тел. (048) 723-28-39. E-mail: druk@onu.edu.ua