УДК 517

И. В. Горохова*, Н. А. Роженко**
*Южноукраинский национальный педагогический
университет имени К. Д. Ушинского
**Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

МАЛЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ В ЦЕНТРЕ

Горохова I. В., Роженко Н. О. Малi поперечнi коливання пружного стержня з зосередженною масою в центрi. Розглянута спектральна задача, пов'язана з описом малих поперечних коливань пружного стержня з зосередженною масою в серединi. Лiвий та правий кiнцi стержня закрiпленi шарнiрно. Отримана асимптотична формула для власних значень цiєї задачi.
Ключовi слова: власнi значення, операторний пучок, краєвi умови, алгебраїчна кратнiсть.

Горохова И. В., Роженко Н. А. Малые поперечные колебания упругого стержня с сосредоточенной массой в центре. Рассмотрена спектральная задача, связанная с описанием малых поперечных колебаний упругого стержня с сосредоточенной массой в центре. Левый и правый концы стержня закреплены шарнирно. Получена асимптотическая формула для собственных значений этой задачи.
Ключевые слова: собственные значения, операторный пучок, алгебраическая кратность, краевые условия.

Gorokhova I. V., Rozhenko N. A. Small transversal vibrations of the elastic rod with the mass concentrated at the middle point. A spectral problem describing small transversal vibrations of an elastic rod with a concentrated mass (bead) at the middle point of the rod is considered. The left and the right ends of the rod are hinge joined. An asymptotic formula for the eigenvalues of this problem is provided.
Key words: eigenvalues, operator pencil, algebraic multiplicity, boundary conditions.

Введение. Начиная с середины XX века в связи с революционным развитием науки и техники, в частности, с появлением космической техники, возникает необходимость в рассмотрении новых начально-краевых спектральных задач математической физики, содержащих спектральный параметр не только в уравнениях, но и в граничных условиях (см. [1] – [5]). Различные виды краевых условий при отсутствии демпфирования рассмотрены в [6]. Особый интерес представляет влияние вязкого трения на изучаемые физические объекты. В предлагаемой работе рассмотрена краевая задача, которая описывает малые поперечные колебания упругого стержня с грузом в центре, который может двигаться по вертикали с вязким трением. Исследования подобных задач с несущей массой на одном конце стержня проводились в [7] – [10].

Малые поперечные колебания упругого однородного стержня плотности $\rho = 1$, растянутого распределённой силой, пропорциональной $g(x) \geqslant 0$, $g \in C^1[0,l]$, описываются уравнением

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0. \quad (1)$$

Растояние от правого и левого конца стержня до груза одинаковое. Здесь x – координата, возрастание которой на каждом из интервалов осуществляется от внешнего конца стержня к центру, t – время, $u(x,t)$ – поперечное смещение точки стержня, находящейся на расстоянии x от левого или правого конца в момент времени t. В центре находится массивное кольцо массы $m>0$, которое может двигаться по вертикали с вязким трением в направлении, перпендикулярном равновесному положению стержня. Левый и правый концы стержня закреплены шарнирно.

Малые поперечные колебания упругого однородного стержня на левом интервале от конца к центру будем описывать уравнением

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)=0, \tag{2}$$

на правом интервале следующим уравнением

$$\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=0. \tag{3}$$

Шарнирное закрепление левого и правого концов описывается краевыми условиями

$$u_1(0,t)=u_2(0,t)=0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 x}\right|_{x=0}=0, \tag{5}$$

условия сопряжения в сечении $x=l$:

$$u_1(l,t)=u_2(l,t), \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=l}=-\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=l}, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 x}\right|_{x=l}=\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 x}\right|_{x=l}, \tag{8}$$

$$-\left.\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}\right|_{x=l}+g(x)\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=l}=$$

$$=\left.\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}\right|_{x=l}+m\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right|_{x=l}-g(x)\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=l}-\beta\left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{x=l}, \tag{9}$$

где $l>0$ – длина стержня, $\beta>0$ – коэффициент вязкого трения (демпфирования) кольца. После стандартного преобразования $u(x,t)=e^{i\lambda t}y(\lambda,x)$ получаем следующую спектральную задачу

$$y_1^{(4)}-\lambda^2 y_1-(gy_1')'=0, \tag{10}$$

$$y_2^{(4)}-\lambda^2 y_2-(gy_2')'=0, \tag{11}$$

$$y_1(\lambda,0)=y_2(\lambda,0)=0, \tag{12}$$

$$y_1^{(2)}(\lambda,0)=y_2^{(2)}(\lambda,0)=0, \tag{13}$$

$$y_1(\lambda, l) = y_2(\lambda, l) = 0, \tag{14}$$

$$y_1^{(1)}(\lambda, l) = -y_2^{(1)}(\lambda, l), \tag{15}$$

$$y_1^{(2)}(\lambda, l) = y_2^{(2)}(\lambda, l), \tag{16}$$

$$-y_1^{(3)}(l) + g(l)y_1'(l) = y_2^{(3)}(l) + m\lambda^2 y_2(l) - g(l)y_2'(l) - i\lambda\beta y_2(l). \tag{17}$$

Основные результаты. Асимптотика собственных значений.

Для нахождения асимптотики собственных значений решение задачи (10) – (17) будем искать в виде

$$y_1(\lambda, x) = A_1 S_1(\lambda, x) + A_2 S_2(\lambda, x) + A_3 S_3(\lambda, x) + A_4 S_4(\lambda, x), \tag{18}$$

$$y_2(\lambda, x) = B_1 S_1(\lambda, x) + B_2 S_2(\lambda, x) + B_3 S_3(\lambda, x) + B_4 S_4(\lambda, x). \tag{19}$$

Положим, что $g = const > 0$. Фундаментальная система решений уравнений (10) и (11) $y_k(\lambda, x)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ задается условиями: $y_k^{(n-1)}(\lambda, 0) = \delta_{k,n}$, $(k, n = 1, 2, 3, 4)$, $\delta_{k,n} = 1$ при $k = n$ и $\delta_{k,n} = 0$, при $k \neq n$ (см. [11]). Прямое вычисление показывает, что

$$S_2(\lambda, x) = \frac{z_1^2 \mathrm{sh}(z_2 x)}{z_2(z_1^2 - z_2^2)} - \frac{z_2^2 \mathrm{sh}(z_1 x)}{z_1(z_1^2 - z_2^2)}, \tag{20}$$

$$S_4(\lambda, x) = \frac{\mathrm{sh}(z_1 x)}{z_1(z_1^2 - z_2^2)} - \frac{\mathrm{sh}(z_2 x)}{z_2(z_1^2 - z_2^2)}, \tag{21}$$

где

$$z_1 = \sqrt{\lambda}(1 + \frac{g}{4\lambda}) + o(\frac{1}{\lambda}), \tag{22}$$

$$z_2 = i\sqrt{\lambda}(1 - \frac{g}{4\lambda}) + o(\frac{1}{\lambda}). \tag{23}$$

Подставим (18), (19) в краевые условия (12) и (13) соответственно и получим

$$y_1(\lambda, 0) = A_2 S_2(\lambda, 0) + A_4 S_4(\lambda, 0), \tag{24}$$

$$y_2(\lambda, 0) = B_2 S_2(\lambda, x) + B_4 S_4(\lambda, 0). \tag{25}$$

Учитывая условия сопряжения (14) – (17), (24) и (25) будут иметь вид

$$A_2 S_2(\lambda, l) + A_4 S_4(\lambda, l) = B_2 S_2(\lambda, x) + B_4 S_4(\lambda, l),$$

$$A_2 S_2^{(1)}(\lambda, l) + A_4 S_4^{(1)}(\lambda, l) = -B_2 S_2^{(1)}(\lambda, l) - B_4 S_4^{(1)}(\lambda, l),$$

$$A_2 S_2^{(2)}(\lambda, l) + A_4 S_4^{(2)}(\lambda, l) = B_2 S_2^{(2)}(\lambda, l) + B_4 S_4^{(2)}(\lambda, l),$$

$$-A_2 S_2^{(3)}(\lambda, l) - A_4 S_4^{(3)}(\lambda, l) + g(A_2 S_2^{(1)}(\lambda, l) + A_4 S_4^{(1)}(\lambda, l)) =$$

$$= B_2 S_2^{(3)}(\lambda, l) + B_4 S_4^{(3)}(\lambda, l) - g(B_2 S_2^{(1)}(\lambda, l) + B_4 S_4^{(1)}(\lambda, l)) +$$

$$+(m\lambda^2 - i\lambda\beta)(B_2 S_2(\lambda, x) + B_4 S_4(\lambda, l)).$$

Система имеет нетривиальное решение, если детерминант матрицы равен нулю, т. е. когда

$$\begin{vmatrix} s_2 & s_4 & -s_2 & -s_4 \\ s_2' & s_4' & s_2' & s_4' \\ s_2'' & s_4'' & -s_2'' & -s_4'' \\ -s_2''' + g s_2' & -s_4''' + g s_4' & -s_2''' + g s_2' - (m\lambda^2 - i\lambda\,\beta) s_2 & -s_4''' + g s_4' s_4 - (m\lambda^2 - i\lambda\,\beta) s_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение с учетом (20) – (21) будет иметь следующий вид

$$[2\,\mathrm{ch}\,(z_2\,l)\,\mathrm{ch}\,(z_1\,l)\,z_2\,{z_1}^3 - 2\,{z_2}^3\,\mathrm{ch}\,(z_2\,l)\,\mathrm{ch}\,(z_1\,l)\,z_1 -$$
$$-i\,\mathrm{sh}\,(z_1\,l)\,\lambda\,\beta\,\,\mathrm{ch}\,(z_2\,l)\,z_2 + \mathrm{sh}\,(z_1\,l)\,m\lambda^2\,\mathrm{ch}\,(z_2\,l)\,z_2 -$$
$$-\,\mathrm{sh}\,(z_2\,l)\,z_1\,m\lambda^2\,\mathrm{ch}\,(z_1\,l) +$$
$$+i\,\mathrm{sh}\,(z_2\,l)\,z_1\,\lambda\,\beta\,\,\mathrm{ch}\,(z_1\,l)]\,\mathrm{sh}\,(z_2\,l)\,\mathrm{sh}\,(z_1\,l) = 0$$

или с учетом (22) – (23) и после некоторых преобразований получим

$$\begin{gathered} \sin(zl) - \left(1 - 1/4\,\frac{g}{\lambda}\right)\cos(zl)\left(1 + 1/4\,\frac{g}{\lambda}\right)^{-1} - \frac{i\beta\,\sin(zl)}{\lambda\,m} + \\ +i\beta\,\left(1 - 1/4\,\frac{g}{\lambda}\right)\cos(zl)\,\lambda^{-1}\left(1 + 1/4\,\frac{g}{\lambda}\right)^{-1} m^{-1} - 2\,i\cos(zl)\,\times \\ \times\left(-i\lambda^2\left(1 + 1/4\,\frac{g}{\lambda}\right)\left(1 - 1/4\,\frac{g}{\lambda}\right)^3 - i\lambda^2\left(1 + 1/4\,\frac{g}{\lambda}\right)^3\left(1 - 1/4\,\frac{g}{\lambda}\right)\right)\times \\ \times\lambda^{-5/2}\left(1 + 1/4\,\frac{g}{\lambda}\right)^{-1} m^{-1} = 0, \end{gathered} \tag{26}$$

где

$$z = \sqrt{\lambda}(1 - \frac{g}{4\lambda}) + o(\frac{1}{\lambda}).$$

Найдем асимптотику корней уравнения (26). Для этого подставим в него:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l} + A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3} + O(\frac{1}{n^4}). \tag{27}$$

Тогда, приравнивая нулю коэффициенты перед степенями $1/n$ в (27), получим асимптотическую формулу:

$$\begin{gathered} \lambda_n = \frac{\pi^2}{l^2}(n + \frac{1}{4})^2 + \frac{4}{lm} - \frac{g}{2\pi n} - \frac{8}{\pi n m^2} + \frac{g}{8n} + \\ + \frac{2}{\pi n^2 m^2} + \frac{g}{8\pi n^2} - \frac{4}{\pi^2 m^2 n^2} + \frac{32l}{3\pi^2 n^2 m^3} + \frac{2lg}{\pi^2 m n^2} - \\ - \frac{g}{32 n^2} + \frac{4il\beta}{\pi^2 n^2 m^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{gathered} \tag{28}$$

Заключение. В представленной работе исследована задача, которая описывает малые поперечные колебания упругого стержня, растянутого распределенной силой с грузом в центре. Груз находится под влиянием вязкого трения. Получена асимптотическая формула (28) этой задачи, из которой видно, что по спектру задачи последовательно можно найти параметры задачи l, g, m, β, т. е. решить обратную задачу для $g = const$.

1. **Miloslavsky A. I.** On instability of linear pipes [text] / Miloslavsky A. I. // Kharkov. –1980. – P. 38–47. (Dinamika system, nesushikh podvizhnuju raspredelennuju nagruzku: Collected papers, Kharkov aviation institute.)
2. **Pivovarchik V. N.** Problem Connected with Oscillations of Elastic Beams with Internal and Viscous Damping [text] / Pivovarchik V. N. // Moscow University Bulletin. –1987. – V. 42. – P. 68–71.
3. **Griniv R. O.** On Operator Pencils Arising in the Problem of Beam Oscillations with Internal Damping [text] / Griniv R. O., Shkalikov A. A. // Matematicheskii zametki. – 1994. – V. 56, № 2. – P. 114–131.
4. **Азизов Т. Я.** Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости [текст] / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский, Л. Д. Орлова // Труды СПб. матем. об–ва. – 1998. – С. 3–33.
5. **Adamyan V.** On a class of non-self-adjoint quadratic matrix quadratic operator pencils arising in elasticity theory [text] / Adamyan V., Pivovarchik V., Tretter C. // J. Operator Theory. – 2002. – V. 47. – P. 325–341.
6. **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения с техническими приложениями [текст] / Коллатц Л. М.: Наука., ГРФМЛ, 1968. – 503 с.
7. **Amara J. B.** Fourth Order Spectral Problem with Eigenvalue in the Boundary Conditions [text] / Amara J. B. // Functional Analysis and its Applications V. Kadets and W. Zelazko. – 2004. – V. 197. – P. 49–58. (North-Holland Mathematics Studies.)
8. **Möller M.** Spectral Properties of a Fourth Order Differential Equation [text] / M. Möller, V. Pivovarchik // Zeitschrift f ur Analysis und ihre Anwendungen Journal for Analysis and its Applications. European Mathematical Society. V. – 2006. – V. 25. – P. 341–366.
9. **Яковлев А. В.** Малые поперечные колебания вязкоупругого стержня с грузом на конце [текст] / Яковлев А. В. // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. – 2006. – Т. 2, № 15 (54). – С. 105–114.
10. **Gorokhova I. V.** Small transversal vibrations of elastic rod with point mass at one end subject to viscous friction [text] / Gorokhova I. V. // Журн. матем. физ., анал., геом. – 2009. – V. 4. – P. 375–385.
11. **Наймарк М. А.** Линейные дифференциальные операторы [текст] / М. А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 512 с.