

$$-\begin{pmatrix} x & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \tilde{L}_\beta \gamma - \int_0^a R(x, y) \varepsilon(y) dy. \quad (38)$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} x & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \tilde{L}_\beta \gamma = \frac{\cos \pi\beta \operatorname{sh} x}{\pi (\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a)^{1/2-\beta}} \int_0^a \frac{(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} s)^{1/2-\beta} \gamma(s)}{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} s} ds; \quad (39)$$

$$\gamma(x) = \varepsilon(x) + \int_0^a R(x, y) \varepsilon(y) dy + \int_b^\infty R(x, y) \Phi_3(y) dy; \quad (40)$$

$$\varepsilon(x) = -\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \bar{K}_\beta F_1 - \begin{pmatrix} a & b \\ x & a \end{pmatrix} \tilde{M}_\beta \begin{pmatrix} \infty \\ b \end{pmatrix} \bar{K}_\beta F_3 - \begin{pmatrix} \infty \\ b \end{pmatrix} \bar{K}_\beta F_3. \quad (41)$$

Уравнение (34) путем регуляризации, как и в работах [2, 3, 6], сводится к уравнению Фредгольма второго рода. Последнее может быть решено одним из приближенных методов. Частным случаем уравнений (20)—(22) (при  $b \rightarrow \infty$ ) являются парные интегральные уравнения [9]. При  $N(\omega) \equiv 0$  решения последних легко получить в замкнутой форме.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1, М., 1965.
2. Валов Г. М. Бесконечный упругий слой и полупространство под действием кольцевого штампа.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 5. 3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977. 4. Гринченко В. П., Улитко А. Ф. Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства.— Инженерно-физ. журн., 1963, т. 6, № 10. 5. Николаев Б. Г. О разложении произвольной функции в интеграл по присоединенным функциям Лежандра первого рода с комплексными знаками.— Математические вопросы теории распространения волн, 1968, т. 9.
6. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., 1960. 7. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., 1977. 8. Cooke J. The solution of triple integral equations in operational form.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1965, vol. 18, N 1. 9. Pathak R. S. On a class of dual integral equations.— Proceed. of the Koninkl. Nederl. Akad. Wet. Ser. A, 1978, vol. 81, N 4. 10. Saxena R. K., Sethi P. I. Applications of fractional integration operators to triple integral equations.— Indian J. Pure and Appl. Math., 1975, vol. 6, N 5. 11. Sneddon I. N. Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, 1966.

Поступила в редакцию 03.06.80

УДК 517.2

Г. Я. ПОПОВ, д-р физ.-мат. наук,  
Одес. ун-т

### РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ФУНКЦИИ ГРИНА

При решении методом интегральных преобразований краевых задач математической физики для областей, содержащих разрезы, для слоистых и многосвязных областей [3, 4] возникает необходимость в достаточно простых формулах, дающих разрывные решения

одномерных краевых задач. Цель статьи: дать достаточно общее и простое решение краевой задачи

$$L_n y = \sum_{j=0}^n p_j(x) y^{(n-j)}(x) = f(x), \quad a < x < b,$$

$$U_m[y] = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{mj} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{mj} y^{(j)}(b) = 0, \quad m = \overline{0, n-1}, \quad (1)$$

имеющее вместе со своими производными (до  $n-1$ -й включительно) разрывы первого рода в точке  $x=c$ ,  $a < c < b$ , т. е.

$$y^{(m)}(c-0) - y^{(m)}(c+0) = \langle y^{(m)}(c) \rangle = x_m, \quad m = \overline{0, n-1}, \quad (2)$$

где  $x_m$  — заданные числа. При этом дифференциальное уравнение из (1) удовлетворяется всюду в интервале  $(a, b)$ , кроме точки  $x=c$ .

Решение сформулированной разрывной краевой задачи можно построить, разбив участок  $(a, b)$  на два  $(a, c) + (c, b)$ . После построения решений краевых задач на  $(a, c)$  и  $(c, b)$  следует выполнить условия сопряжения с учетом (2). Однако такой путь весьма громоздок, особенно если точек разрыва несколько.

Излагаемый ниже способ построения разрывного решения не требует разбиения на участки, позволяет получить решения сразу для любого конечного числа точек разрыва и базируется на использовании свойств функции Грина  $G(x, \xi)$  краевой задачи (1). При этом основной результат получен при обычных [2] ограничениях на коэффициенты дифференциального оператора  $L_n$  и граничные функционалы  $U_m$ , гарантирующих существование единичной функции Грина  $G(x, \xi)$  краевой задачи (1) и сопряженного оператора  $L_n^*$ .

Учитывая эти ограничения (здесь и ниже они [2] оговариваться не будут), легко доказать следующее предложение.

**Теорема 1.** Решение разрывной краевой задачи (1), (2) единственно.

Для фактического его построения введем базисную систему разрывных решений  $\bar{y}_j(x)$ ,  $j = \overline{0, n-1}$ , удовлетворяющих краевой задаче

$$L_n \bar{y}_j = 0 \quad (a < x < b, x \neq c), \quad U_m[\bar{y}_j] = 0, \quad (3)$$

$$\langle \bar{y}_j^{(k)}(c) \rangle = \delta_{jk}, \quad j, k, m = \overline{0, n-1},$$

где  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера.

Нетрудно проверить, что решение разрывной краевой задачи (1), (2) выражается через указанную систему по формуле

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \sum_{j=0}^{n-1} x_j \bar{y}_j(x), \quad a < x < b. \quad (4)$$

Для построения же решения разрывной краевой задачи потребуются, помимо известных [2], и некоторые новые изложенные ниже свойства функции Грина.

Функцию Грина краевой задачи (1) всегда можно представить в виде [3]

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} y_j(x) a_j(\xi), & x \leq \xi, \\ \sum_{j=0}^{n-1} y_j(x) b_j(\xi), & x > \xi, \end{cases} \quad (5)$$

где  $y_j(x)$ ,  $j = \overline{0, n-1}$  — фундаментальная система решений оператора  $L_n$  ( $L_n y_j = 0$ ), а для функций  $a_j(\xi)$ ,  $b_j(\xi)$  имеются формулы, определяющие их единственным образом [2].

**Теорема 2.** Функция Грина краевой задачи (1) может быть представлена в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk} y_j(x) y_k^*(\xi), & x \leq \xi, \\ \sum_{j,k=0}^{n-1} b_{jk} y_j(x) y_k^*(\xi), & x > \xi, \end{cases} \quad (6)$$

где  $y_k^*(x)$ ,  $k = \overline{0, n-1}$  — фундаментальная система решений сопряженного дифференциального оператора ( $L_n^* y_k^* = 0$ ), а  $a_{jk}$ ,  $b_{jk}$ ,  $j, k = \overline{0, n-1}$  — числа.

Для доказательства следует принять во внимание, что  $G(\xi, x)$  является функцией Грина сопряженной краевой задачи. Поэтому  $L_n^* \left[ \sum_{j=0}^{n-1} y_j(\xi) a_j(x) \right] = \sum_{j=0}^{n-1} y_j(\xi) L_n^* [a_j(x)] = 0$ . Последнее равенство и линейная независимость фундаментальной системы решений  $y_j(x)$  приводит к равенствам  $L_n^* [a_j(x)] = 0$ ,  $j = \overline{0, n-1}$ . Аналогично показывается, что  $L_n^* [b_j(x)] = 0$ . Следовательно, справедливы представления

$$\begin{pmatrix} a_j(x) \\ b_j(x) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} a_{jk} \\ b_{jk} \end{pmatrix} y_k^*(x),$$

подстановка которых в (5) приводит к формуле (6), что и требовалось.

Если краевая задача (1) самосопряженная, то

$$G(x, \xi) = G(\xi, x). \quad (7)$$

Требую выполнения этого условия от функции (6) и принимая во внимание то, что в разбираемом случае  $y_j(x) = y_j^*(x)$ ,  $j =$

$= 0, n - 1$ , приходим к представлению

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{j,k}^{n-1} a_{jk} y_j(x) y_k(\xi), & x \leq \xi \\ \sum_{j,k}^{n-1} a_{jk} y_j(\xi) y_k(x), & x \geq \xi \end{cases} \quad (8)$$

для функции Грина самосопряженной краевой задачи (1).

Введем следующие обозначения для производных функции Грина и их скачков:

$$G^{l,m}(x, \xi) = \frac{\partial^{l+m}}{\partial x^l \partial \xi^m} G(x, \xi),$$

$$\langle G_{\xi}^{l,m} \rangle = G^{l,m}(\xi - 0, \xi) - G^{l,m}(\xi + 0, \xi) = G^{l,m}(\xi, \xi + 0) - G^{l,m}(\xi, \xi - 0), \quad l, m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\langle G_{\xi}^{l,m} \rangle^{(k)} = \frac{d^k}{d\xi^k} \langle G_{\xi}^{l,m} \rangle. \quad (9)$$

В силу определяющих свойств функции Грина [2] из представлений (5), (6) вытекают соотношения

$$\langle G_{\xi}^{m,0} \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} y_j^{(m)}(\xi) [a_j(\xi) - b_j(\xi)] = \sum_{j,k=0}^{n-1} y_j^{(m)}(\xi) y_k^*(\xi) (a_{jk} - b_{jk}) = 0, \quad (10)$$

$$\langle G_{\xi}^{0,m} \rangle = \sum_{j,k=0}^{n-1} y_j(\xi) y_k^{(m)}(\xi) (a_{jk} - b_{jk}) = 0, \quad m = \overline{0, n-2}. \quad (11)$$

$$\langle G_{\xi}^{n-1,0} \rangle = \frac{-1}{p_0(\xi)}, \quad \langle G_{\xi}^{0,n-1} \rangle = \frac{(-1)^n}{p_0(\xi)}.$$

В (9) — (11) и далее считается, что  $a < \xi < b$ .

*Лемма 1.* Все смешанные производные функции Грина порядка меньше  $n - 1$  непрерывны в области  $a < x, y < b$ , т. е.

$$\langle G_{\xi}^{m,l} \rangle = 0, \quad l + m < n - 1. \quad (12)$$

Действительно, при  $l=0$  справедливость леммы следует из (10). Для доказательства ее в случае  $l=1$  и  $m < n-2$  про дифференцируем первое соотношение из (10) по  $\xi$

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} [y_j^{(m+1)}(\xi) y_k^*(\xi) + y_j^{(m)}(\xi) y_k^{*'}(\xi)] (a_{jk} - b_{jk}) = 0, \quad m = \overline{0, n-3}.$$

Отсюда, учитывая (10) и представление (6), устанавливаем, что

$$\langle G_{\xi}^{n,1} \rangle = \sum_{j,k=0}^{n-1} y_j^{(m)}(\xi) y_k^{**}(\xi) (a_{jk} - b_{jk}) = 0, \quad m = \overline{0, n-3}.$$

Дифференцируя полученное соотношение по  $\xi$  и принимая во внимание (10), находим

$$\langle G_{\xi}^{m,2} \rangle = \sum_{j,k=0}^{n-1} y_j^{(m)}(\xi) y_k^{**}(\xi) (a_{jk} - b_{jk}) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-4.$$

Продолжая процесс, переберем все требуемые значения  $m$  и  $l$  в (12) и тем самым полностью докажем сформулированную лемму.

Перейдем к изучению скачков смешанных производных функции Грина (9) порядка  $n-1$  и выше.

*Лемма 2.* Скачки смешанных производных функции Грина (9) порядка  $n-1$  обладают свойством

$$\langle G_{\xi}^{n-1-i,i} \rangle = (-1)^i \langle G_{\xi}^{n-1,0} \rangle = (-1)^{i+1} p_0^{-1}(\xi), \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (13)$$

Для доказательства продифференцируем обе части равенства

$$\langle G_{\xi}^{n-2-m,m} \rangle = \sum_{j,k=0}^{n-1} y_j^{(n-2)}(\xi) (a_{jk} - b_{jk}) = 0, \quad m = \overline{0, n-2},$$

справедливого в силу леммы 1. Это приводит к соотношению  $\langle G_{\xi}^{n-1-m,m+1} \rangle = -\langle G_{\xi}^{n-1-m,m} \rangle$ ,  $m = \overline{0, n-2}$ , позволяющему очевидно провести доказательство леммы по индукции.

Доказательство следующих двух лемм, которые не будут использованы при получении основного результата статьи, проведем при дополнительном допущении о непрерывной дифференцируемости до порядка  $2n-1$  (включительно) фундаментальных систем решений  $y_j(x)$ ,  $y_j^*(x)$ ,  $j = \overline{0, n-1}$ , на интервале  $(a, b)$ .

*Лемма 3.* Скачки смешанных производных функции Грина (9) порядка выше  $n-1$  обладают свойством

$$\langle G_{\xi}^{n+m-i,i} \rangle = (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \langle G_{\xi}^{n+m-i,0} \rangle^{(j)}, \quad m = \overline{0, n-1}, \\ i = \overline{0, n+m}. \quad (14)$$

Доказательство проведем по индукции. С этой целью предварительно выполним дифференцирование по правилу Ньютона — Лейбница [1] в правой части равенства

$$\langle G_{\xi}^{n+m-l,0} \rangle^{(l)} = \left[ \sum_{j,k=0}^{n-1} (a_{jk} - b_{jk}) y_j^{n+m-l}(\xi) y_k^*(\xi) \right]^{(l)}, \quad l = \overline{0, n+m}.$$

В результате получаем

$$\langle G_{\xi}^{n+m-l,0} \rangle^{(l)} = \sum_{q=0}^l \binom{l}{q} \langle G_{\xi}^{n+m-q,q} \rangle, \quad l = \overline{0, n+m}, \quad (15)$$

откуда при  $l=1$  следует справедливость (14) для  $i=1$ . Полагая теперь справедливым соотношение (14) для  $i=r$ ,  $r=1, 2, \dots$ , докажем, что оно имеет место и для  $r+1$ . Для этого соотношение (15) при  $l=r+1$  перепишем (выделяя слагаемое  $q=r+1$  в содержащейся там сумме) в виде

$$\langle G_{\xi}^{n+m-r-1,r+1} \rangle = \langle G_{\xi}^{n+m-r-1,0} \rangle^{(r+1)} - \sum_{q=0}^r \binom{r+1}{q} \langle G_{\xi}^{n+m-q,q} \rangle. \quad (16)$$

Используя соотношение (14) для  $i=q \leq r$  и изменяя порядок суммирования, находим

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^r \binom{r+1}{q} \langle G_{\xi}^{n+m-q,q} \rangle &= \sum_{j=0}^r S_{r,j} \langle G_{\xi}^{n+m-j,0} \rangle^{(j)}, \quad (17) \\ S_{r,j} &= (-1)^j \sum_{q=j}^r (-1)^q \binom{r+1}{q} \binom{q}{j} = \\ &= (-1)^j \sum_{q=j}^{r+1} (-1)^q \binom{r+1}{q} \binom{q}{j} + (-1)^{r+1} \binom{r+1}{j}. \end{aligned}$$

В правой части последнего равенства воспользуемся соотношением

$$(-1)^j \sum_{i=j}^l \binom{l}{i} \binom{i}{j} (-1)^i = \begin{cases} 0, & j < l, \\ 1, & j = l, \end{cases}$$

вытекающим из преобразований

$$\begin{aligned} x^l &= [1 - (1-x)]^l = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} (-1)^i (1-x)^i = \\ &= \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} (-1)^i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^j x^j = \sum_{j=0}^l (-1)^j x^j \sum_{i=j}^l \binom{l}{i} \binom{i}{j} (-1)^i. \end{aligned}$$

Последующая подстановка (17) в (16) убеждает в справедливости (14) при  $i=r+1$ .

Доказанная лемма позволяет выражать скачки любых смешанных производных (порядка больше  $n-2$ ) через скачки производных только от переменной  $x$ , так как

$$\langle G_{\xi}^{l,k} \rangle = \langle G_{\xi}^{n-1+m-k,k} \rangle, \quad j+k \geq n-1, \quad m = j+k - (n-1). \quad (18)$$

При этом полезно иметь в виду, что в случае самосопряженных краевых задач имеет место равенство

$$\langle G_{\xi}^{m,m} \rangle = 0, \quad m = \overline{0, n-1}, \quad (19)$$

вытекающее из представления (8).

*Лемма 4.* Скачки производных (порядка выше  $n-1$ ) функции Грина по первой переменной связаны рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} p_0(\xi) \langle G_{\xi}^{n+k,0} \rangle &= \frac{1}{p_0(\xi)} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} p_{i+1}^{(k-i)}(\xi) - \\ &- \sum_{i=0}^{k-1} \langle G_{\xi}^{n+k-1-i,0} \rangle \sum_{q=0}^{i+1} \binom{k}{k+q-i-1} p_q^{(i-q+1)}(\xi), \\ p_0^2(\xi) \langle G_{\xi}^{n,0} \rangle &= p_1(\xi), \quad k = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для доказательства, используя (5), запишем

$$\langle G_{\xi}^{n+k,0} \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} [a_j(\xi) - b_j(\xi)] y_j^{(n+k)}(\xi), \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (21)$$

В полученном равенстве производную от  $y_j(\xi)$  порядка  $n+k$  заменим на линейную комбинацию производных более низкого порядка. С этой целью проведем дифференцирование по правилу Ньютона—Лейбница [4]

$$\left[ \sum_{s=0}^n p_{n-s}(\xi) y_j^{(s)}(\xi) \right]^{(k)} = \sum_{s=0}^n \sum_{r=s}^{r=s+k} \binom{k}{r-s} p_{n-s}^{(k-r+s)}(\xi) y_j^{(r)}(\xi) = 0.$$

Последующее изменение порядка суммирования приводит к формуле

$$\begin{aligned} p_0(\xi) y_j^{(n+k)}(\xi) &= - \sum_{r=n}^{n+k-1} y_j^{(r)}(\xi) \sum_{s=r-k}^n \binom{k}{r-s} p_{n-s}^{(k+s-r)}(\xi) - \\ &- y_j^{(n-1)}(\xi) \sum_{s=n-1-k}^{n-1} \binom{k}{n-1-s} p_{n-s}^{(k+s-n+1)}(\xi) + O(y_j^{(n-2)}), \\ k &= \overline{0, n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_0(\xi) y_j^{(n+k)}(\xi) &= -y_j^{(n-1)} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} p_{i+1}^{(k-i)}(\xi) - \\
 &- \sum_{i=0}^{k-1} y_j^{(n+k-1-i)}(\xi) \sum_{q=0}^{i+1} \binom{k}{k+q-i-1} p_q^{(i-q+1)}(\xi) + O(y_j^{(n-2)}), \\
 &k = \overline{0, n-1}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь следует иметь в виду, что последнее слагаемое представляет собой линейную комбинацию из производных функции  $y_j(x)$  порядка  $n-2$  и ниже, и при  $k=0$  двойную сумму следует отбрасывать.

Если теперь подставить (22) в (21) и учесть (10), то придем к требуемому рекуррентному соотношению (20).

Приступим теперь к нахождению базисной системы разрывных решений, определенной соотношениями (3). Будем строить ее в виде

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_{n-1-m}(x) &= (-1)^{m+1} \left[ p_0(c) G^{0,m}(x, c) + \sum_{i=1}^m C_{mi} G^{0,m-i}(x, c) \right], \\
 m &= 0, 1, \dots, n-1, \quad C_{mi} = \text{const},
 \end{aligned} \tag{23}$$

выбрасывая содержащуюся здесь сумму при  $m=0$ .

Функции (23) удовлетворяют краевым условиям из (3), так как им удовлетворяет функция Грина  $G(x, \xi)$ . Кроме того, в силу лемм 1 и 2 они обладают свойством

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{y}_{n-1-m}^{(n-1-m-k)}(c) \rangle &= 0, \quad k = \overline{1, n-1-m}, \\
 \langle \tilde{y}_{n-1-m}^{(n-1-m)}(c) \rangle &= 1, \quad m = \overline{0, n-1}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, функция (23) будет решением разрывной краевой задачи (3) при выполнении соотношения  $\langle \tilde{y}_{n-1-m}^{(n-1-m+k)}(c) \rangle = 0$ ,  $m = \overline{1, n-1}$ ;  $k = \overline{1, m}$ . Подставляя сюда (23), получаем

$$\begin{aligned}
 p_0(c) \langle G_c^{n-1-m+k,m} \rangle + \sum_{i=1}^k C_{mi} \langle G_{mi}^{n-1-m+k,m-i} \rangle &= 0, \\
 m = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{1, m}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Определитель полученной системы отличен от нуля в силу (13). Следовательно, коэффициенты  $G_{mi}$  могут всегда быть найдены. Для этого удобно записать систему (24) в виде рекуррентного соотношения

$$(-1)^{m-k} C_{m\bar{R}} p_0^{-1}(c) = \sum_{i=1}^{k-1} C_{mi} \langle G_c^{n-1-m+k,m-i} \rangle + p_0(c) \langle G_i^{n-1-m+k,m} \rangle,$$



$$k = 2, 3, \dots, m, (-1)^{m+1} C_{m1} = p_0^2(c) \langle G_c^{n-m,m} \rangle, \quad m = \overline{1, n-1}. \quad (25)$$

Итак, мы приходим к основному результату, который формулируем в виде теоремы.

**Теорема 3.** Решение разрывной краевой задачи (1), (2) определяется формулами (4), (23) и (25).

Рассмотрим некоторые важные частные случаи. Начнем с самосопряженной разрывной краевой задачи вида

$$\begin{aligned} -[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) &= f(x), & a_0 < x < a_1, \\ U_j[y] = \alpha_{j0}y(a_j) + \alpha_{j1}y'(a_j) &= 0, & j = 0, 1, \\ \langle y^{(j)}(c) \rangle &= x_j, & j = 0, 1; \quad a_0 < c < a_1, \end{aligned} \quad (26)$$

В этом случае система разрывных решений согласно (23) имеет вид

$$\bar{y}_1(x) = p(c)G(x, c), \quad \bar{y}_0(x) = -p(c)G^{0,1}(x, c) + C_{11}G(x, c),$$

причем на основании второго равенства из (25) и (19)  $C_{11} = 0$ , и решение краевой задачи (26) запишем в виде

$$y = \int_{a_0}^{a_1} G(x, \xi) f(\xi) d\xi + p(c)[x_1 G(x, c) - x_0 G^{0,1}(x, c)].$$

Рассмотрим теперь случай, когда в дифференциальном уравнении краевой задачи (1) коэффициенты постоянны, т. е.  $p_j = \text{const}$ ,  $j = 0, n$ . В этом случае ее решение тоже существенно упрощается. Действительно, вместо (20) имеем

$$p_0 \langle G_{\xi}^{n+k,0} \rangle = - \sum_{i=0}^k p_{i+1} \langle G_{\xi}^{n+k-1-i,0} \rangle, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (27)$$

Это в сочетании с (11) показывает, что скачки всех производных функции Грина постоянны (не зависят от  $\xi$ ). Поэтому соотношение (14) приобретает вид

$$\langle G_{\xi}^{n+m-k,k} \rangle = (-1)^k \langle G_{\xi}^{n+m,0} \rangle, \quad m, k = \overline{0, n-1}. \quad (28)$$

Это равенство показывает, что решение системы уравнений (24) не зависит от  $m$ . Следовательно, полагая  $C_{mj} \equiv C_j$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ , ее можно записать в виде

$$p_0 \langle G_c^{n+l,0} \rangle + \sum_{j=0}^l C_{j+1} (-1)^{j+1} \langle G_c^{n+l-1-j,0} \rangle = 0, \quad l = \overline{0, n-2}.$$

Сопоставляя полученное соотношение с (27), находим  $C_m = (-1)^m p_m$ ,  $m = \overline{1, n-1}$ . Следовательно, базисная система раз-

рывных решений при  $p_m = \text{const}$ ,  $m = \overline{0, n}$ , определяется формулой

$$\tilde{y}_{n-1-m}(x) = (-1)^{m+1} \left[ p_0 G^{0,m}(x, c) + \sum_{j=1}^m (-1)^j p_j G^{0,m-1}(x, c) \right],$$

$$m = \overline{0, n-1}. \quad (29)$$

В заключение отметим, что в случае дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами разрывные краевые задачи можно решать с помощью обобщенного варианта [3] метода интегральных преобразований. Например, применяя к решению разрывной краевой задачи

$$\sum_{j=0}^n p_j \tilde{y}^{(n-j)}(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad x \neq c,$$

$$\tilde{y}^{(n-j-1)}(\pm \infty) = 0; \quad \langle \tilde{y}_l^{(j)}(c) \rangle = \delta_{jl}; \quad j, l = \overline{0, n-1} \quad (30)$$

преобразование Фурье по схеме, изложенной в [3], приходим вновь к формуле (29), в которой следует положить

$$G(x, \xi) = \Phi(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha(x-\xi)}}{Q_n(-i\alpha)} d\alpha, \quad Q_n(z) = \sum_{j=0}^n p_j z^{n-j}. \quad (31)$$

Заменой  $i\alpha = -\beta$  с последующим использованием леммы Жордана и теоремы о вычетах формулу (31) можно привести к виду

$$\Phi(x, \xi) = \pm \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^\pm} \frac{e^{\mp\beta(x-\xi)}}{Q_n(\beta)} d\beta, \quad x \leq \xi. \quad (32)$$

Здесь  $C^\pm$  — замкнутые (конечные) контуры, охватывающие корни многочлена  $Q_n(\beta)$ , лежащие соответственно левее и правее мнимой оси.

Изложенный способ не охватывает случай, когда указанный многочлен имеет чисто мнимые корни. Однако, если в представлении (32) в качестве контура  $C^+$  брать любой замкнутый контур, охватывающий какие-либо корни многочлена  $Q_n(\beta)$ , а в качестве  $C^-$  — любой замкнутый контур, охватывающий оставшиеся корни указанного многочлена, то можно показать, что полученная формула для решения задачи (30) сохранит силу. Значит, указанное ограничение на расположение корней может быть отброшено.

Кроме того, можно показать, что решение разрывной краевой задачи (1), (2) в случае уравнения с постоянными коэффициентами можно записать и в таком виде:

$$y(x) = \int_a^b \Phi(x, \xi) f(\xi) d\xi - \sum_{j=0}^{n-1} U_j [\Phi_c(x)] \psi_j(x) + \Phi_c(x),$$

$$\Phi_c(x) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j(x) x_j. \quad (33)$$

Здесь  $\bar{y}_j(x)$  определены формулами (29), (31) и (32), а через  $\psi_j(x)$ ,  $j = \bar{0}, n-1$  обозначены решения краевых задач

$$L_n \psi_j(x) = 0, \quad a < x < b; \quad U_n[\psi_j] = \delta_{nj}, \quad n, j = \bar{0}, n-1.$$

Формула (33) позволяет при решении разрывных краевых задач миновать построение функции Грина.

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962. 2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1959. 3. Попов Г. Я. Об одном способе решения задач механики для областей с разрезами или тонкими включениями.— Прикл. математика и механика, 1978, т. 42, вып. 1. 4. Попов Г. Я. О расширении возможностей метода интегральных преобразований.— Прикл. математика и механика, 1980, т. 44, вып. 1.

Поступила в редколлегию 10.05.80

УДК 517.97

Б. Н. БУБЛИК, чл.-кор. АН УССР,  
А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ, канд. физ.-мат. наук, С. И. ЧЕРНЯК, асп.,  
Киев. ун-т

### О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МИНИМАКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Задачи минимаксного оценивания для уравнений с частными производными сводятся к решению сопряженных уравнений с распределенными параметрами [1]. Поэтому разработка приближенных методов нахождения таких оценок является актуальной. Для приближенного решения задач минимаксного оценивания для уравнений параболического типа ниже предлагается и обосновывается метод, являющийся сочетанием градиентного метода [2] и метода локально-одномерных схем [3]. Данный метод является расширением метода, предложенного в работе [4].

1. Пусть система описывается уравнениями

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = A\varphi(x, t) + f_1(x, t), \quad (x, t) \in Q; \quad (1)$$

$$\varphi(x, 0) = j_0(x), \quad x \in \Omega; \quad (2)$$

$$\varphi(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma. \quad (3)$$

По наблюдению вида

$$y(x, t) = \varphi(x, t) + f_2(x, t) \quad (4)$$

необходимо оценить состояние  $\varphi(x, t)$  системы (1)–(3) и функционал

$$L(\varphi) = \int_Q l(x, t) \varphi(x, t) dx dt. \quad (5)$$