Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. i мех. – 2010. – Т. 15, вип. 19. – С. 9–20

М А Т Е М А Т И К А

УДК 511

И. Н. Величко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБОБЩЕННЫЕ СУММЫ КЛОСТЕРМАНА НАД КОЛЬЦОМ МАТРИЦ $M_n(\mathbb{Z}[I])$

Величко I. М. Узагальненi суми Клостермана над кiльцем матриць $M_n(\mathbb{Z}[i])$. Побудовано узагальнення сум Клостермана на кiльце матриць з цiлими гауссовими елементами. Отриманi оцiнки цих сум у випадку $n = 2$.
Ключовi слова: узагальненi суми Клостермана, матрицi з цiлими гауссовими елементами, арифметичнi функцiї у кiльцях матриць, система лишкiв за модулем матрицi.

Величко И. Н. Обобщенные суммы Клостермана над кольцом матриц $M_n(\mathbb{Z}[i])$. Построено обобщение сумм Клостермана на кольцо матриц с целыми гауссовыми элементами. Получены оценки этих сумм в случае $n = 2$.
Ключевые слова: обобщенные суммы Клостермана, матрицы с целыми гауссовыми элементами, арифметические функции в кольцах матриц, система вычетов по модулю матрицы.

Velichko I. N. Generalized Kloosterman sum over the matrix ring $M_n(\mathbb{Z}[i])$. We constructed the generalized Kloosterman sums in matrix ring with Gaussian integers. Estimates for the such sums for $n = 2$ were obtained.
Key words: generalized Kloosterman sums, matrices with Gaussian integers, arithmetical functions in matrix rings, residue system modulo matrix.

Введение.

Классическим результатом аналитической теории чисел является оценка так называемой суммы Клостермана над кольцом $\mathbb{Z}$:

$$K_q(u,v) := \sum_{(q,x)=1} e^{2\pi i\,\frac{(ux+vx^{-1})}{q}} \ll \sqrt{(u,v,q)}\sqrt{q}. \tag{1}$$

Аналогичного вида суммы можно рассматривать и в других кольцах. В частности, обобщением понятия суммы Клостермана на случай кольца целых гауссовых чисел занималась Bruggeman R. W. и Motohashi Y. [1], Жанбарбаева У. Б. [2], Varbanets S. P. [3]. Суммой Клостермана над кольцом целых гауссовых чисел назвали сумму

$$K_\gamma(\alpha,\beta) := \sum_{(\gamma,x)=1} e^{\pi i\, Sp(\frac{(\alpha x+\beta x^{-1})}{\gamma})},$$

для нее была получена оценка

$$K_\gamma(\alpha,\beta) \ll 2^{\omega(\gamma)+1}|\gamma|^{1/2}|(\alpha,\beta,\gamma)|^{1/2}. \tag{2}$$

Yoshiyuki Kitaoka в 1984 году в [4] ввел один из вариантов понятия сумм Клостермана над кольцом $M_2(\mathbb{Z})$ и получил оценку этих сумм. Цель данной работы — используя аналогичную технику и оценку (2), ввести понятия суммы Клостермана над кольцом матриц с целыми гауссовыми коэффициентами и получить оценку соответствующей обобщенной суммы.

Обозначим через $\mathbb{Z}[i]$ кольцо целых гауссовых чисел

$$\mathbb{Z}[i] := \left\{ a + bi \middle| a, b, \in \mathbb{Z}, i^2 = -1 \right\}.$$

Тогда кольцо классов вычетов по модулю произвольного элемента $\mathfrak{t} \in \mathbb{Z}[i]/\{0\}$ будем обозначать через $\mathbb{Z}[i]_{\mathfrak{t}}$. Для произвольного $x = a + bi$ величины $\overline{x} = a - bi$, $N(x) = x\overline{x} = a^2 + b^2$, $Sp(x) = x + \overline{x} = 2a$ будем называть соответственно сопряженным, нормой и следом элемента x. Кроме того, для произвольной матрицы $A = \{a_{ij}\}_1^n$ обозначим через $Tr(A) = \sum\limits_i a_{ii}$ след матрицы A. По аналогии с $M_n(\mathbb{Z})$, кольцо матриц $n \times n$ с элементами из $\mathbb{Z}[i]$ будем обозначать через $M_n(\mathbb{Z}[i])$.

Основные результаты.

Пусть матрица C, $det\, C \neq 0$ — произвольная матрица из $M_n(\mathbb{Z}[i])$. По аналогии с классическим результатом Смита, существует такая матрица $S \in M_n(\mathbb{Z}[i])$, что $C = U\,S\,V$, $U, V \in GL_n(\mathbb{Z}[i])$ и

$$S = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_{22} & \ldots & 0 \\ & \ldots & \ldots & \\ 0 & \ldots & 0 & c_{nn} \end{pmatrix},$$

где $c_{ii}|c_{i+1\,i+1}$. Матрицу S будем обозначать через $\hat{C}$ и называть смитовской нормальной формой матрицы C.

Определение 1. *Будем говорить, что матрица $A \in M_n(\mathbb{Z}[i])$ делится слева (справа) на матрицу $C \in M_n(\mathbb{Z}[i])$, если $A = CB$ (соответственно $A = BC$) для некоторой матрицы $B \in M_n(\mathbb{Z}[i])$. Аналогично будем считать, что матрица $A \in M_n(\mathbb{Z}[i])$ делится на матрицу $C \in M_n(\mathbb{Z}[i])$, если $A = BCD$ для некоторых матриц $B, D \in M_n(\mathbb{Z}[i])$.*

Далее, если это специально не оговорено, будем считать матрицу C невырожденной.

Определение 2. *Пусть C, $det\, C \neq 0$ — произвольная матрица из $M_n(\mathbb{Z}[i])$. Будем говорить, что матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{Z}[i])$ сравнимы по модулю матрицы C и писать при этом $A \equiv B \mod C$, если $B = A + CD$ для некоторой $D \in \in M_n(\mathbb{Z}[i])$. Множество всех сравнимых с A матриц будем называть классом вычетов матрицы A по модулю C и обозначать $\overline{A}$.*

Определение 3. *Пусть матрица $\hat{C} \in M_n(\mathbb{Z}[i])$, $det\, \hat{C} \neq 0$ является смитовской нормальной формой некоторой матрицы $C \in M_n(\mathbb{Z}[i])$, то есть*

$$C = U\hat{C}V,\ \hat{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_{22} & \ldots & 0 \\ & \ldots & \ldots & \\ 0 & \ldots & 0 & c_{nn} \end{pmatrix},\ c_{ii}|c_{i+1\,i+1},\ U, V \in GL_n(\mathbb{Z}[i]).$$

Пусть $A = \{a_{ij}\}_1^n$ *— произвольная матрица из* $M_n(\mathbb{Z}[i])$. *Любую матрицу* $A' \in M_n(\mathbb{Z}[i])$, *такую, что* $A' \equiv A \mod C$, *будем называть вычетом матрицы* A *по модулю матрицы* C. *Любое множество* Ω *всевозможных несравнимых по модулю* C *матриц, такое, что* $\forall A' \in \Omega\ A'C = CD$, *для некоторой* $D \in M_n(\mathbb{Z}[i])$, *будем называть системой вычетов по модулю матрицы* C.

Замечание 1. *В общем случае не все вычеты матрицы* C *имеют своих представителей в произвольной фиксированной системе вычетов* Ω. *Это связано с возможным отсутствием корректности при умножении для более широкого множества. Для иллюстрации рассмотрим следующий*

Пример 1. *Пусть* $C = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & (2+i)^2 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin \Omega_C$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \in \Omega_C$, $A_2' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \in \overline{A}_2$, *тогда*

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \mod C,$$

$$A_1A_2' = \begin{pmatrix} 17 & 5 \\ 22 & 8 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 22 & 8 \end{pmatrix} \mod C.$$

Таким образом, $A_1A_2 \not\equiv A_1A_2'$, *следовательно,* $A_1A_2 \notin \overline{A_1A_2'}$.

Проверим корректность определения при умножении: если A_1' и A_2' — вычеты соответственно матриц A_1 и A_2 по модулю матрицы C, то $A_1 = A_1' + CD_1$, $A_2 = A_2' + CD_2$ для некоторых $D_1, D_2 \in M_n(\mathbb{Z}[i])$. Тогда

$$A_1A_2 = (A_1' + CD_1)(A_2' + CD_2) = A_1'A_2' + C(D_1A_2' + DD_2 + D_1CD_2).$$

Замечание 2. *Пусть* C, $det\, C \neq 0$ *— произвольная матрица из* $M_n(\mathbb{Z}[i])$, $\hat{C}$ *— ее смитовская нормальная форма,* $C = U\hat{C}V$, $U, V \in GL_n(\mathbb{Z}[i])$ *и* Ω_1, Ω_2 *— соответственно системы вычетов по модулю матриц* $\hat{C}$ *и* C.

Покажем, что множество $U\Omega_1U^{-1}$ *является системой вычетов по модулю матрицы* C *и наоборот, множество* $U^{-1}\Omega_2U$ *является системой вычетов по модулю матрицы* $\hat{C}$.

Поскольку $A_1 \in \Omega_1$, *то* $A_1\hat{C} = \hat{C}D_1$, $D_1 \in M_n(\mathbb{Z}[i])$. *Домножая теперь обе части равенства на* U *и* V, *получим*

$$UA_1U^{-1}U\hat{C}V = U\hat{C}VV^{-1}D_1V,$$

где $V^{-1}D_1V \in M_n(\mathbb{Z}[i])$, *то есть для произвольного элемента* $A_2 = UA_1U^{-1}$ *множества* $U\Omega_1U^{-1}$ *выполнено соотношение* $A_2C = CD_2$, $D_2 \in M_n(\mathbb{Z}[i])$. *Аналогично можно показать, что для произвольного элемента* $A_1 = U^{-1}A_2U$ *множества* $U^{-1}\Omega_2U$ *выполнено соотношение* $A_1\hat{C} = \hat{C}D_3$, $D_3 \in M_n(\mathbb{Z}[i])$.

Заметим теперь, что если $A_1 \not\equiv B_1 \mod \hat{C}$, *то* $UA_1U^{-1} \not\equiv UB_1U^{-1} \mod C$. *Действительно, если предположить, что* $UA_1U^{-1} = UB_1U^{-1} + CD_4$, *то домножая обе части равенства на* U^{-1} *и* U, *получим* $A_1 = B_1 + \hat{C}VD_4U$, *то есть*

$A_1 \equiv B_1 \mod \hat{C}$. *Аналогично, если* $A_2 \not\equiv B_2 \mod C$, *то* $U^{-1}A_2U \not\equiv UB_2U^{-1} \mod \hat{C}$. *То есть мы получили, что* $|\Omega_1| = |\Omega_2|$. *Таким образом, множества* $U\Omega_1U^{-1}$ *и* $U^{-1}\Omega_2U$ *являются системами вычетов по модулям* C *и* $\hat{C}$, *соответственно.*

Определение 4. *Пусть* $C \in M_n(\mathbb{Z}[i])$, $\det C \neq 0$, $A \in \Omega$, *где* Ω *— некоторая система вычетов по модулю матрицы* C. *Если существует матрица* $A' \in \Omega$, *такая что* $AA' \equiv A'A \equiv E \mod C$, *то матрицу* A' *будем называть обратной по модулю* C *матрице* A *и обозначать через* A_C^{-1}, *будем говорить при этом, что матрица* A *обратима. Множество всех обратимых матриц из* Ω *обозначим через* Ω^*.

Замечание 3. *Заметим, что если* $A \equiv B \mod C$, $A \in \Omega^*$, *то существует* B_C^{-1} *и* $B_C^{-1} \equiv A_C^{-1} \mod C$. *Также, для фиксированной матрицы* $A \in \Omega$ *существует не более одной матрицы, обратной по модулю* C. *Действительно, если*

$$AA' = E + CD_1,\ A'A = E + CD_2,\quad AA'' = E + CD_3,\ A''A = E + CD_4,$$

и

$$A'C = CD_5,\quad A''C = CD_6,$$

то $A(A'' - A') = CD_4$, *откуда* $(E + CD_2)(A'' - A') = CD_5D_4$ *и, следовательно,* $A'' - A' = CD_7$, *что и требовалось показать.*

Замечание 4. *Пусть* $A \in \Omega$ *такая, что* $(\det A, \det C) = 1$. *Покажем, что существует матрица* $A_C^{-1} \in \Omega$. *Поскольку* $\det A \neq 0$, *то существует матрица* $A^* \in M_n(\mathbb{Z}[i])$ *такая, что* $A^*A = AA^* = E\det A$. *Выбирая теперь такие* $s, t \in \mathbb{Z}[i]$, *чтобы* $t\det A + s\det C = 1$, *полагаем* $A_C^{-1} = tA^*$. *Проверим теперь, что* A_C^{-1} *принадлежит* Ω. *Действительно, поскольку* $AC = CD$ *для некоторого* $D \in M_n(\mathbb{Z}[i])$, *то домножая обе части этого соотношения на* A^*, *получим, что* $C\det A = A^*CD$. *С другой стороны,* $\det A \det C = \det C \det D$, *откуда* $\det A = \det D$. *Поэтому заменив* $\det A$ *на* $\det D$, *получим, что* $C\det D = A^*CD$. *Домножая теперь справа обе части соотношения на* D^* *и сокращая на* $\det D \neq 0$, *получим, что* $A^*C = CD^*$. *Значит,* $A^* \in \Omega$, *а следовательно, и* $tA^* \in \Omega$. *Заметим теперь, что* $AA_C^{-1} = tAA^* = (t\det A)E = E - (s\det C)E = E - CsC^* \equiv E \mod C$, *аналогично и* $A_C^{-1}A \equiv E \mod C$, *то есть* A_C^{-1} *— искомая.*

Замечание 5. *Условие* $(\det A, \det C) = 1$ *является лишь достаточным:*

Пример 2. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3+i & 2+i \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 3+3i \end{pmatrix},$$

очевидно, что $(\det A, \det C) = 1$. *Следовательно, согласно замечанию 2, существует* A_C^{-1}. *Но тогда, согласно замечанию 1, существует и обратная матрица для* $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 3+i & 2+i \end{pmatrix} \in \overline{A}$, *для которой* $(\det A', \det C) = 3$.

Таким образом, для любой фиксированной матрицы $C \in M_n(\mathbb{Z}[i])$, любая система вычетов Ω по модулю C обладает следующими свойствами:

1. Если $A, B \in \Omega$, то $A \pm B \in \Omega,\ AB \in \Omega$.

2. Для любой $A \in \Omega$ существует матрица $A^*_C \in \Omega$, такая что $AA^*_C \equiv \equiv A^*_C A \equiv det\, A \cdot E \mod C$. Если, кроме того, $(det\, A, det\, C) = 1$, то существует и $A^{-1}_C \in \Omega$.

Лемма 1. *Пусть C — произвольная матрица из $M_n(\mathbb{Z}[i])$, $det\, C \neq 0$, Ω_1, Ω_2 — произвольные системы вычетов по модулю матрицы C, тогда*

$$\sum_{X \in \Omega_1^*} e^{\pi i\ Sp(Tr(UC^{-1}X + X_C^{-1}VC^{-1}))} = \sum_{X \in \Omega_2^*} e^{\pi i\ Sp(Tr(UC^{-1}X + X_C^{-1}VC^{-1}))}.$$

□ Покажем, что если $X \equiv Y\, mod\, C$, то

$$exp\Big(Sp\big(Tr(UC^{-1}X + X_C^{-1}VC^{-1})\big)\Big) = \\ = exp\Big(Sp\big(Tr(UC^{-1}Y + Y_C^{-1}VC^{-1})\big)\Big).$$

Действительно, поскольку $X = Y + CD_1$, то $X_C^{-1} = Y_C^{-1} + CD_2$, поэтому

$$exp\Big(Sp\big(Tr(UC^{-1}X + X_C^{-1}VC^{-1})\big)\Big) = \\ = exp\Big(Sp\big(Tr(UC^{-1}Y + UD_1 + Y_C^{-1}VC^{-1} + CD_2VC^{-1})\big)\Big) = \\ = [Sp(a+bi) = 2a] = exp\Big(Sp\big(Tr(UC^{-1}Y + Y_C^{-1}VC^{-1})\big)\Big).$$

Таким образом, суммы из формулировки леммы состоят из попарно равных слагаемых и, следовательно, равны. ■

Лемма 2. *Пусть $\hat{C}, \hat{F}, \hat{H}$ — смитовские нормальные формы некоторых матриц $C, F, H \in M_n(\mathbb{Z}[i])$. И пусть $\Omega_{\hat{C}}$, $\Omega_{\hat{F}}$, $\Omega_{\hat{H}}$ — соответствующие системы вычетов, причем имеют место соотношения $\hat{C} = \hat{F}\hat{H}$, $det\, C \neq 0$, $(det F, det H) = = 1$. Тогда существует биективное отображение между множествами $\Omega_{\hat{C}}$ и $\Omega_{\hat{F}} \times \Omega_{\hat{H}}$, это же отображение является и биекцией множеств $\Omega^*_{\hat{C}}$ и $\Omega^*_{\hat{F}} \times \Omega^*_{\hat{H}}$.*

□ Обозначим через f, h соответственно определители матриц F и H. Поскольку $(f, h) = 1$, то существуют такие $q, r \in \mathbb{Z}[i]$, что $qf^2 + rh^2 = 1$.

Пусть $X \in \Omega_{\hat{C}}$, положим, $X_1 := rh^2\hat{H}^{-1}X,\ X_2 := qf^2\hat{F}^{-1}X$, тогда $X_1\hat{F} = = \hat{F}D_1$. Действительно, поскольку $X\hat{C} = \hat{C}D$, то $X\hat{F} = \hat{F}\hat{H}D\hat{H}^{-1}$. А так как $\hat{F}, \hat{H}$ диагональные и $(f, h) = 1$, то $D_2 := \hat{H}D\hat{H}^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}[i])$, а значит, $X\hat{F} = \hat{F}D_1$. Откуда получаем, что и $X_1\hat{F} = \hat{F}D_2$ для некоторой $D_2 \in M_n(\mathbb{Z}[i])$. Аналогично для X_2 выполняется соотношение $X_2\hat{H} = \hat{H}D_3$ для некоторой $D_3 \in \in M_n(\mathbb{Z}[i])$. Таким образом, должны существовать матрицы $A \in \Omega_{\hat{F}},\ B \in \Omega_{\hat{H}}$, такие, что $X_1 \equiv A\, mod\, \hat{F},\ X_2 \equiv B\, mod\, \hat{H}$.

Несложно показать, что если $A' \in \Omega_{\hat{F}}, B' \in \Omega_{\hat{H}}$, то матрица $M := \hat{H}A' + \hat{F}B'$ удовлетворяет соотношению $M\hat{C} = \hat{C}D$, для некоторого $D \in M_n(\mathbb{Z}[i])$. То есть должна существовать матрица $X' \in \Omega_{\hat{C}}$, такая, что $X' \equiv M \; mod\, \hat{C}$.

Рассмотрим отображения $\varphi\colon\ \Omega_{\hat{C}} \to \Omega_{\hat{F}} \times \Omega_{\hat{H}}$, $\phi\colon\ \Omega_{\hat{F}} \times \Omega_{\hat{H}} \to \Omega_{\hat{C}}$, заданные соответственно равенствами $\varphi(X) = (A, B)$ и $\phi((A', B')) = X'$. Покажем, что $\varphi(\phi(A, B)) = (A, B)$, $\phi(\varphi(X)) = X$. Действительно,

$$
\begin{aligned}
&rh^2\hat{H}^{-1}(\hat{H}A + \hat{F}B) = rh^2A + rh^2\hat{H}^{-1}\hat{F}B = \\
&\qquad\qquad\qquad = (1 - qf^2)A + \hat{F}rh^2\hat{H}^{-1}B \equiv A \; mod\, \hat{F}; \\
&qf^2\hat{F}^{-1}(\hat{H}A + \hat{F}B) = qf^2\hat{F}^{-1}\hat{H}A + qf^2B = \\
&\qquad\qquad\qquad = (1 - rh^2)B + \hat{H}qf^2\hat{F}^{-1}A \equiv B \; mod\, \hat{H}; \\
&\hat{H}rh^2\hat{H}^{-1}X + \hat{F}qf^2\hat{F}^{-1}X = X.
\end{aligned}
$$

Получаем, что $\varphi(\phi) = id_{\Omega_{\hat{F}} \times \Omega_{\hat{H}}}$, $\phi(\varphi) = id_{\Omega_{\hat{C}}}$, то есть φ осуществляет биективное отображение $\Omega_{\hat{C}}$ на $\Omega_{\hat{F}} \times \Omega_{\hat{H}}$.

Пусть теперь $X \in \Omega^*_{\hat{C}}$, $A \in \Omega^*_{\hat{F}}, B \in \Omega^*_{\hat{H}}$, тогда поскольку $(det\,(rh^2\hat{H}^{-1}),\ det\,\hat{F}) = 1$ и $(det\,(qf^2\hat{F}^{-1}),\ det\,\hat{H}) = 1$, то

$$
\begin{aligned}
&(rh^2\hat{H}^{-1}X)(X_C^{-1}(rh^2\hat{H}^{-1})_F^{-1}) \equiv \\
&\qquad \equiv (X_C^{-1}(rh^2\hat{H}^{-1})_F^{-1})(rh^2\hat{H}^{-1}X) \equiv E \mod \hat{F}; \\
&(qf^2\hat{F}^{-1}X)(X_C^{-1}(qf^2\hat{F}^{-1})_H^{-1}) \equiv \\
&\qquad \equiv (X_C^{-1}(qf^2\hat{F}^{-1})_H^{-1})(qf^2\hat{F}^{-1}X) \equiv E \mod \hat{H}; \\
&(\hat{H}A + \hat{F}B)(rh^2A_F^{-1}\hat{H}^{-1} + qf^2B_H^{-1}\hat{F}^{-1}) \equiv \\
&\qquad \equiv (rh^2A_F^{-1}\hat{H}^{-1} + qf^2B_H^{-1}\hat{F}^{-1})(\hat{H}A + \hat{F}B) \equiv E \mod \hat{C},
\end{aligned}
$$

то есть $\varphi(X) \in \Omega^*_{\hat{F}} \times \Omega^*_{\hat{H}}$ и $\phi(A, B) \in \Omega^*_{\hat{C}}$.
Таким образом, φ биективно отображает $\Omega^*_{\hat{C}}$ на $\Omega^*_{\hat{F}} \times \Omega^*_{\hat{H}}$, а ϕ наоборот. ■

Следствие 1. *В случае если матрицы X_1 и X_2 пробегают соответственно системы вычетов $\Omega^*_{\hat{F}}$, $\Omega^*_{\hat{H}}$, множество значений выражения $\hat{H}X_1 + \hat{F}X_2$ образует некоторую систему вычетов $\Omega^*_{\hat{C}}$ по модулю матрицы $\hat{C}$.*

Определение 5. *Пусть Q, S, C, $det\,(QSC) \neq 0$ — произвольные матрицы из $M_n(\mathbb{Z}[i])$ и Ω_C некоторая система вычетов по модулю C. Сумму*

$$
K(Q, S, C) := \sum_{X \in \Omega^*_C} e^{\pi i\, Sp(Tr(QC^{-1}X + X_C^{-1}SC^{-1}))} \tag{3}
$$

будем называть суммой Клостермана над кольцом $M_n(\mathbb{Z}[i])$ по модулю матрицы C.

Замечание 6. *Корректность определения следует из Леммы 1.*

Лемма 3. *Пусть Q, S, C $det\,(QSC) \neq 0$ — произвольные матрицы из $M_n(\mathbb{Z}[i])$, $C = U\hat{C}V$ для некоторых $U, V \in GL_n(\mathbb{Z}[i])$, тогда имеет место соотношение*

$$
K(Q, S, C) = K(U^{-1}QV^{-1}, U^{-1}SV^{-1}, \hat{C}).
$$

□ Согласно определению, Ω_C^* совпадает с множеством $U\Omega_{\hat{C}}^* U^{-1}$, поэтому

$$K(Q,S,C) = \sum_{X\in\Omega_C^*} e^{\pi i\, Sp(Tr(QC^{-1}X + X_C^{-1}SC^{-1}))} =$$

$$= \sum_{Y\in\Omega_{\hat{C}}^*} e^{\pi i\, Sp(Tr(QV^{-1}\hat{C}^{-1}U^{-1}UYU^{-1} + UY_C^{-1}U^{-1}SV^{-1}\hat{C}^{-1}U^{-1}))} =$$

$$= K(U^{-1}QV^{-1}, U^{-1}SV^{-1}, \hat{C}),$$

что и требовалось доказать. ■

Из предыдущей леммы следует, что при доказательстве утверждений относительно $K(Q,S,C)$ достаточно ограничиваться случаем, когда C является смитовской нормальной формой.

Лемма 4. *("Мультипликативность") Пусть $\hat{C},\hat{F},\hat{H} \in M_n(\mathbb{Z}[i])$ – смитовские нормальные формы некоторых матриц, имеет место соотношение $\hat{C} = \hat{F}\hat{H}$, тогда соответствующие суммы Клостермана связаны соотношением*

$$K(Q,S,\hat{C}) = K(Q, rh^2\hat{H}^{-1}S\hat{H}^{-1}, \hat{F}) \cdot K(Q, qf^2\hat{F}^{-1}S\hat{F}^{-1}, \hat{H}),$$

где $h = det\, H$, $f = det\, F$, а $r,q \in \mathbb{Z}[i]$ такие, что $rh^2 + qf^2 = 1$.

□ Согласно Следствию 1, когда матрицы A и B будут пробегать соответственно множества $\Omega_{\hat{F}}^*$ и $\Omega_{\hat{H}}^*$, выражение $\hat{H}A + \hat{F}B$ пробежит все элементы множества $\Omega_{\hat{C}}^*$. Заметим также, что

$$(\hat{H}A + \hat{F}B)_{\hat{C}}^{-1} = rh^2 A_{\hat{F}}^{-1}\hat{H}^{-1} + qf^2 B_{\hat{H}}^{-1}\hat{F}^{-1}.$$

Таким образом,

$$K(Q,S,\hat{C}) =$$

$$= \sum_{A\in\Omega_{\hat{F}}^*}\sum_{B\in\Omega_{\hat{H}}^*} e^{\pi i\, Sp(Tr(Q\hat{C}^{-1}(\hat{H}A+\hat{F}B) + (rh^2A_{\hat{F}}^{-1}\hat{H}^{-1} + qf^2B_{\hat{H}}^{-1}\hat{F}^{-1})S\hat{C}^{-1}))} =$$

$$= \sum_{A\in\Omega_{\hat{F}}^*} e^{\pi i\, Sp(Tr(Q\hat{F}^{-1}A + A_{\hat{F}}^{-1}(rh^2\hat{H}^{-1}S\hat{H}^{-1})\hat{F}^{-1}))} \cdot$$

$$\cdot \sum_{B\in\Omega_{\hat{H}}^*} e^{\pi i\, Sp(Tr(Q\hat{H}^{-1}B + B_{\hat{H}}^{-1}(qf^2\hat{F}^{-1}S\hat{F}^{-1})\hat{H}^{-1}))} =$$

$$= K(Q, rh^2\hat{H}^{-1}S\hat{H}^{-1}, \hat{F}) \cdot K(Q, qf^2\hat{F}^{-1}S\hat{F}^{-1}, \hat{H}),$$

что и требовалось доказать. ■

С помощью следующего утверждения мы будем доказывать критерий существования обратного элемента.

Лемма 5. *Пусть $A = \{a_{ij}\}_1^n \in M_n(\mathbb{Z}[i])$ такая, что определитель любой матрицы порядка k, составленной из столбцов матрицы $A_k = \{a_{ij}\}_{i=n-k+1,j=1}^n$, делится на простое $\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}[i]$. Тогда для любой матрицы $B = \{b_{ij}\}_1^n \in M_n(\mathbb{Z}[i])$ произведение AB также обладает этим свойством.*

☐ Из условия леммы следует, что любые k столбцов матрицы $A_k = \{a_{ij}\}_{i=n-k+1\, j=1}^{n}$ линейно зависимы по модулю $\mathfrak{p}$. Выберем теперь максимально возможное число линейно независимых столбцов, не ограничивая общности, будем считать, что это первые t $(t < k)$ столбцов. Тогда оставшиеся $k - t$ столбцов можно выразить через первые t:

$$a_{n-k+i\,j} = \sum_{l=1}^{t} \alpha_{lj}\, a_{n-k+i\,l}\,,$$
$$i = \overline{1,k},\ j = \overline{t+1,n},\ \alpha_{lj} \in \mathbb{Z}_p[i].$$

Рассмотрим теперь элементы последних k строк произведения $D = AB$:

$$d_{n-k+i\,j} = \sum_{s=1}^{n} a_{n-k+i\,s} b_{s\,j} = a_{n-k+i\,1} b_{1\,j} + \ldots + a_{n-k+i\,t} b_{t\,j} +$$
$$+ \left(\sum_{l_1=1}^{t} \alpha_{l_1\,1}\, a_{n-k+i\,l_1}\right) b_{t+1\,j} + \ldots + \left(\sum_{l_{n-t}=1}^{t} \alpha_{l_{n-t}\,n-t}\, a_{n-k+i\,l_{n-t}}\right) b_{nj} =$$
$$= a_{n-k+i\,1}(b_{1j} + \alpha_{11} b_{t+1\,j} + \ldots + \alpha_{1\,n-t} b_{nj}) + \ldots +$$
$$+ a_{n-k+i\,t}(b_{tj} + \alpha_{t1} b_{t+1\,j} + \ldots + \alpha_{t\,n-t} b_{nj}) =$$
$$= \beta_{1j} a_{n-k+i\,1} + \ldots + \beta_{tj} a_{n-k+i\,t}.$$

Учитывая, что коэффициенты $\beta_{1j}, \ldots, \beta_{tj}$ не зависят от i, получаем, что столбцы матрицы $D_k = \{d_{ij}\}_{i=n-k+1,j=1}^{n}$ являются линейными комбинациями первых t столбцов матрицы A_k. Но поскольку $t < k$, то, согласно классическим результатам линейной алгебры, система из произвольных k столбцов будет линейно зависимой. Следовательно определитель, матрицы составленной из произвольных k столбцов матрицы D_k, будет делиться на $\mathfrak{p}$. ■

Лемма 6. *(критерий существования обратного) Пусть* $C \in M_n(\mathbb{Z}\,[i])$, $detC = \mathfrak{p}^t, \mathfrak{p}$ *— простое из* $\mathbb{Z}\,[i], A \in \Omega_C$*, тогда* $A \in \Omega_C^* \Leftrightarrow \exists\, A' \in \overline{A} : (detA', detC) = 1$.

☐ Достаточность критерия следует из Замечания 4. Покажем необходимость. Предположим, что для всех $A' \in \overline{A}$: $ord_{\mathfrak{p}}(det\,A', det\,C) \geq 1$ и $\exists\, A_C^{-1}$. Учитывая связь между Ω_C и $\Omega_{\hat{C}}$, можно считать, что C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}^{c_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathfrak{p}^{c_2} & \ldots & 0 \\ & \ldots & \ldots & \\ 0 & \ldots & 0 & \mathfrak{p}^{c_n} \end{pmatrix},$$

где $0 \leq c_1 \leq \ldots \leq c_n$. Обозначим через t наименьший номер, для которого $c_{t+1} > 0$.

Все матрицы из $\overline{A}$ имеют вид:

$$A + CE_1 =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+e_{11} & a_{12}+e_{12} & \dots & a_{1n}+e_{1n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{t\,1}+e_{t\,1} & a_{t\,2}+e_{t\,2} & \dots & a_{t\,n}+e_{t\,n} \\ a_{t+1\,1}+\mathfrak{p}^{c_{t+1}}e_{t+1\,1} & a_{t+1\,2}+\mathfrak{p}^{c_{t+1}}e_{t+1\,2} & \dots & a_{t+1\,n}+\mathfrak{p}^{c_{t+1}}e_{t+1\,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n1}+\mathfrak{p}^{c_n}e_{n1} & a_{n2}+\mathfrak{p}^{c_n}e_{n2} & \dots & a_{nn}+\mathfrak{p}^{c_n}e_{nn} \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что коэффициенты $e_{11},...,e_{tn} \in \mathbb{Z}[i]$ — произвольные, получаем, что в предположении, что для всех $A' \in \overline{A}:\ ord_p(det\,A', det\,C) \geq 1$, любые k столбцов, где $k = n-t$, матрицы $A_k = \{a_{ij}\}_{i=n-k+1,j=1}^{n}$ линейно зависимы по модулю $\mathfrak{p}$. Но тогда, согласно лемме 5, и любое произведение вида AB должно обладать таким свойством, в частности и AA_C^{-1}. Заметим теперь, что последние k строк матрицы AA_C^{-1} по модулю $\mathfrak{p}$ совпадают с соответствующими строками единичной матрицы E. А так как последние k столбцов единичной матрицы линейно независимы по любому простому модулю, получаем противоречие. ■

Рассмотрим подробнее случай $n = 2$.

Теорема 1. *Пусть $Q, S, C \in M_2(\mathbb{Z}[i])$ такие, что*

$$C = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}^{c_1} & 0 \\ 0 & \mathfrak{p}^{c_2} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix},$$

где $\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}[i]$ — простое, $q_{11}, q_{12}, q_{22} \not\equiv 0 \mod \mathfrak{p}$. Тогда

$$K(Q,S,C) \ll |\mathfrak{p}|^{3c_1+\frac{c_2}{2}}. \tag{4}$$

□ Рассмотрим сначала случай $0 < c_1 < c_2$. Заметим прежде всего, что

$$X \in \Omega_C^* \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ \mathfrak{p}^{c_2-c_1}x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},\ (det\,X, \mathfrak{p}) = 1;$$

$$X_C^{-1} = t \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -\mathfrak{p}^{c_2-c_1}x_{21} & x_{11} \end{pmatrix},$$

где $t\,det\,X + s\,det\,C = 1$, $x_{11}, x_{12}, x_{21} \in \mathbb{Z}[i]_{\mathfrak{p}^{c_1}}$, $x_{22} \in \mathbb{Z}[i]_{\mathfrak{p}^{c_2}}$, $(x_{11}x_{22}, \mathfrak{p}) = 1$. Тогда, как несложно проверить,

$$Sp\big(Tr(QC^{-1}X + X_C^{-1}SC^{-1})\big) =$$
$$= Sp\big((q_{11}x_{11}\mathfrak{p}^{-c_1} + q_{12}x_{21}\mathfrak{p}^{-c_1} + q_{21}x_{12}\mathfrak{p}^{-c_1} + q_{22}x_{22}\mathfrak{p}^{-c_2}) +$$
$$+t(s_{11}x_{22}\mathfrak{p}^{-c_1} - s_{21}x_{12}\mathfrak{p}^{-c_1} - s_{12}x_{21}\mathfrak{p}^{-c_1} + s_{22}x_{11}\mathfrak{p}^{-c_2})\big).$$

Положим теперь $\delta := det\,X = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}\mathfrak{p}^{c_2-c_1}$, $t\delta \equiv 1 \mod \mathfrak{p}^{c_2+c_1}$, $\overline{x}_{11} \in \mathbb{Z}[i]_{\mathfrak{p}^{c_2+c_1}} :\ \overline{x}_{11}x_{11} \equiv 1 \mod \mathfrak{p}^{c_2+c_1}$, тогда $x_{22} \equiv \delta\overline{x}_{11} + x_{12}x_{21}\overline{x}_{11}\mathfrak{p}^{c_2-c_1}$. Таким образом, получим

$$
\begin{aligned}
&e\big(Sp(Tr(QC^{-1}X+X_C^{-1}SC^{-1}))\big)=\\
&=e\big(Sp(q_{11}x_{11}\mathfrak{p}^{-c_1}+q_{12}x_{21}\mathfrak{p}^{-c_1}+q_{21}x_{12}\mathfrak{p}^{-c_1}+q_{22}\delta\overline{x}_{11}\mathfrak{p}^{-c_2}+\\
&\quad+q_{22}x_{12}x_{21}\overline{x}_{11}\mathfrak{p}^{-c_1}+t(s_{11}\delta\overline{x}_{11}\mathfrak{p}^{-c_1}+s_{11}x_{12}x_{21}\overline{x}_{11}\mathfrak{p}^{c_2-2c_1}-s_{21}x_{12}\mathfrak{p}^{-c_1}-\\
&\quad-s_{12}x_{21}\mathfrak{p}^{-c_1}+s_{22}x_{11}\mathfrak{p}^{-c_2}))\big)=e\big(Sp((q_{11}x_{11}+q_{12}x_{21}+q_{21}x_{12}+\\
&\quad+q_{22}x_{12}x_{21}\overline{x}_{11}+s_{11}\overline{x}_{11})\mathfrak{p}^{-c_1}+(q_{22}\overline{x}_{11})\delta\mathfrak{p}^{-c_2}+(s_{11}x_{12}x_{21}\overline{x}_{11}\mathfrak{p}^{2c_2-2c_1}-\\
&\qquad-s_{21}x_{12}\mathfrak{p}^{c_2-c_1}-s_{12}x_{21}\mathfrak{p}^{c_2-c_1}+s_{22}x_{11})t\mathfrak{p}^{-c_2})\big).
\end{aligned}
$$

Получаем, что

$$
\begin{aligned}
&\sum_{X\in\Omega_C^*}e\big(Sp(Tr(QC^{-1}X+X_C^{-1}SC^{-1}))\big)=\\
&=\sum_{X\in\Omega_C^*}e\big(Sp((q_{11}x_{11}+q_{12}x_{21}+q_{21}x_{12}+q_{22}x_{12}x_{21}\overline{x}_{11}+s_{11}\overline{x}_{11})\mathfrak{p}^{-c_1}+\\
&\qquad+(q_{22}\overline{x}_{11})\delta\mathfrak{p}^{-c_2}+(s_{11}x_{12}x_{21}\overline{x}_{11}\mathfrak{p}^{2c_2-2c_1}-s_{21}x_{12}\mathfrak{p}^{c_2-c_1}-\\
&\qquad-s_{12}x_{21}\mathfrak{p}^{c_2-c_1}+s_{22}x_{11})t\mathfrak{p}^{-c_2})\big).
\end{aligned}
$$

Заметим, что поскольку $(x_{11},\mathfrak{p})=1$, то когда x_{22} пробегает систему вычетов по модулю $\mathfrak{p}^{c_2}$, значение выражения $x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}\mathfrak{p}^{c_2-c_1}$ пробегает всю систему вычетов по модулю $\mathfrak{p}^{c_2}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{X\in\Omega_C^*}e\big(Sp(Tr(QC^{-1}X+X_C^{-1}SC^{-1}))\big)\Big|=\\
&=\Big|\sum_{\substack{x_{11},\,x_{12},\,x_{21}\in\mathbb{Z}[i]_{\mathfrak{p}^{c_1}}\\(x_{11},\mathfrak{p})=1}}e\big(Sp((q_{12}x_{21}+q_{21}x_{12})\mathfrak{p}^{-c_1}+\\
&\qquad+(q_{11}x_{11}+(q_{22}x_{12}x_{21}+s_{11})\overline{x}_{11})\mathfrak{p}^{-c_1})\big)\times\\
&\qquad\times K_{\mathfrak{p}^{c_2}}(q_{22}\overline{x}_{11},s_{11}x_{12}x_{21}\overline{x}_{11}\mathfrak{p}^{2c_2-2c_1}-\\
&\qquad-s_{21}x_{12}\mathfrak{p}^{c_2-c_1}-s_{12}x_{21}\mathfrak{p}^{c_2-c_1}+s_{22}x_{11})\Big|\ll\\
&\ll\sum_{\substack{x_{11},\,x_{12},\,x_{21}\in\mathbb{Z}[i]_{\mathfrak{p}^{c_1}}\\(x_{11},\mathfrak{p})=1}}\Big|e\big(Sp((q_{12}x_{21}+q_{21}x_{12})\mathfrak{p}^{-c_1}+\\
&\qquad+(q_{11}x_{11}+(q_{22}x_{12}x_{21}+s_{11})\overline{x}_{11})\mathfrak{p}^{-c_1})\big)\Big|\times\\
&\times\Big|K_{\mathfrak{p}^{c_2}}(q_{22}\overline{x}_{11},s_{11}x_{12}x_{21}\overline{x}_{11}\mathfrak{p}^{2c_2-2c_1}-s_{21}x_{12}\mathfrak{p}^{c_2-c_1}-s_{12}x_{21}\mathfrak{p}^{c_2-c_1}+s_{22}x_{11})\Big|.
\end{aligned}
$$

Используя теперь оценку (2), получаем

$$
\Big|\sum_{X\in\Omega_C^*}e\big(Sp(Tr(QC^{-1}X+X_C^{-1}SC^{-1}))\big)\Big|\ll|\mathfrak{p}|^{3c_1+\frac{c_2}{2}}.
$$

Предположим теперь, что $c_1 = 0$, тогда

$$X \in \Omega_C^* \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix},\ (x_{22}, \mathfrak{p}) = 1;$$

$$X_C^{-1} = t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $tx_{22} + s\, det\, C = 1$, $x_{22} \in \mathbb{Z}\,[i]_{\mathfrak{p}^{c_2}}$. Заметим, что в этом случае $E \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mod C. Несложно проверить, что

$$Sp\big(Tr(QC^{-1}X + X_C^{-1}SC^{-1})\big) = q_{22}x_{22}\mathfrak{p}^{-c_2} + ts_{22}\mathfrak{p}^{-c_2}.$$

Таким образом,

$$\Big|\sum_{X \in \Omega_C^*} e\big(Sp(Tr(QC^{-1}X + X_C^{-1}SC^{-1}))\big)\Big| =$$

$$= \Bigg|\sum_{\substack{x_{22} \in \mathbb{Z}\,[i]_{\mathfrak{p}^{c_2}} \\ (x_{22}, \mathfrak{p}) = 1}} e^{Sp\left((q_{22}x_{22} + s_{22}t)\mathfrak{p}^{-c_2}\right)}\Bigg| = \Big|K_{\mathfrak{p}^{c_2}}(q_{22}, s_{22})\Big| \ll |\mathfrak{p}|^{\frac{c_2}{2}}.$$

Теперь рассмотрим случай когда $c_1 = c_2$. Заметим прежде всего, что

$$X \in \Omega_C^* \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},\ (det\, X, \mathfrak{p}) = 1;$$

$$X_C^{-1} = t \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix},$$

где $t\, det\, X + s\, det\, C = 1$, $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{Z}\,[i]_{\mathfrak{p}^{c_2}}$, $(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}, \mathfrak{p}) = 1$. Тогда, если положить $\delta := x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$, то

$$Sp\big(Tr(QC^{-1}X + X_C^{-1}SC^{-1})\big) = Sp\big((q_{11}x_{11} + q_{12}x_{21} + q_{21}x_{12} + q_{22}x_{22}) + \\ + t(s_{11}x_{22} - s_{21}x_{12} - s_{12}x_{21} + s_{22}x_{11}))\mathfrak{p}^{-c_2}\big);$$

$$\Big|\sum_{X \in \Omega_C^*} e\big(Sp(Tr(QC^{-1}X + X_C^{-1}SC^{-1}))\big)\Big| \le$$

$$\le \Bigg|\sum_{\substack{x_{11}, x_{12}, x_{21}, \delta \\ x_{11}, \delta \not\equiv 0\ mod\ \mathfrak{p}}}\Bigg| + \Bigg|\sum_{\substack{x_{11}, x_{12}, x_{22}, \delta \\ x_{12},\ \delta \not\equiv 0\ mod\ \mathfrak{p},\ x_{11} \equiv 0\ mod\ \mathfrak{p}}}\Bigg|,$$

где $x_{22} \equiv \delta\overline{x}_{11} + x_{12}x_{21}\overline{x}_{11}$ и $x_{21} \equiv x_{11}x_{22}\overline{x}_{12} - \delta\overline{x}_{12}$. А поскольку

$$e\big(Sp(q_{11}x_{11} + q_{12}x_{21} + q_{21}x_{12} + q_{22}x_{22} + \\ + t(s_{11}x_{22} - s_{21}x_{12} - s_{12}x_{21} + s_{22}x_{11})\mathfrak{p}^{-c_2})\big) = \\ = e\big(Sp((q_{11}x_{11} + q_{12}x_{21} + q_{21}x_{12} + q_{22}x_{12}x_{21}\overline{x}_{11} + s_{11}\overline{x}_{11})\mathfrak{p}^{-c_2} + \\ + ((q_{22}\overline{x}_{11})\delta\mathfrak{p}^{-c_2} + (s_{11}x_{12}x_{21}\overline{x}_{11} - s_{21}x_{12} - s_{12}x_{21} + s_{22}x_{11})t\mathfrak{p}^{-c_2})\big);$$

$$e\big(Sp(q_{11}x_{11}+q_{12}x_{21}+q_{21}x_{12}+q_{22}x_{22}+ \\ +t(s_{11}x_{22}-s_{21}x_{12}-s_{12}x_{21}+s_{22}x_{11})\mathfrak{p}^{-c_2})\big)=$$

$$=e\big(Sp((q_{11}x_{11}+q_{12}x_{11}x_{22}\overline{x}_{12}+q_{21}x_{12}+q_{22}x_{22}+s_{12}\overline{x}_{12})\mathfrak{p}^{-c_2}+ \\ +(-q_{12}\overline{x}_{12})\delta\mathfrak{p}^{-c_2}+(s_{11}x_{22}-s_{21}x_{12}-s_{12}x_{11}x_{22}\overline{x}_{12}+s_{22}x_{11})t\mathfrak{p}^{-c_2})\big),$$

то

$$\Big|\sum_{X\in\Omega_C^*} e\big(Sp(Tr(QC^{-1}X+X_C^{-1}SC^{-1}))\big)\Big|\leq$$

$$\leq\Big|\sum_{\substack{x_{11},x_{12},x_{21},\delta\\ x_{11},\delta\not\equiv 0\ mod\ \mathfrak{p}}}\Big|+\Big|\sum_{\substack{x_{11},x_{12},x_{22},\delta\\ x_{12},\delta\not\equiv 0\ mod\ \mathfrak{p},\ x_{11}\equiv 0\ mod\ \mathfrak{p}}}\Big|\leq$$

$$\leq\mathfrak{p}^{3c_2}|K_{\mathfrak{p}^{c_2}}(q_{22}\overline{x}_{11},s_{11}x_{12}x_{21}\overline{x}_{11}-s_{21}x_{12}-s_{12}x_{21}+s_{22}x_{11})|+ \\ +\mathfrak{p}^{3c_2-1}|K_{\mathfrak{p}^{c_2}}(-q_{12}\overline{x}_{12},s_{11}x_{22}-s_{21}x_{12}-s_{12}x_{11}x_{22}\overline{x}_{12}+s_{22}x_{11})|\ll|\mathfrak{p}|^{3c_2+\frac{c_2}{2}},$$

что и требовалось доказать. ■

Следствие 2. *Пусть $Q,S,C\in M_2(\mathbb{Z}[i])$ такие, что*

$$C=U\hat{C}V,\ \hat{C}=\begin{pmatrix}\mathfrak{p}^{c_1} & 0\\ 0 & \mathfrak{p}^{c_2}\end{pmatrix},$$

$$U^{-1}QV^{-1}=\begin{pmatrix}q'_{11} & q'_{12}\\ q'_{21} & q'_{22}\end{pmatrix},U^{-1}SV^{-1}=\begin{pmatrix}s'_{11} & s'_{12}\\ s'_{21} & s'_{22}\end{pmatrix},$$

где $\mathfrak{p}$ — простое из $\mathbb{Z}[i]$, $q'_{11},q'_{12},q'_{22}\not\equiv 0 \mod \mathfrak{p}$. Тогда

$$K(Q,S,C)\ll|\mathfrak{p}|^{3c_1+\frac{c_2}{2}}. \tag{5}$$

Заключение. Таким образом, мы ввели понятие сумм Клостермана над произвольным кольцом $M_n(\mathbb{Z}[i])$, $n>1$ и получили оценки этих сумм для случаев $n=2$. Используя результаты оценки обобщений сумм Клостермана на другие расширения поля $\mathbb{Q}$ и приведенную выше схему рассуждений, несложно получить оценки обобщений сумм Клостермана уже на кольца матриц над соответствующим расширением $\mathbb{Q}$.

1. **Bruggeman R. W.** Sum formula for Kloosterman sums and the fourth moment of the Dedekind zeta-function over the Gaussian number field [text] / R. W. Bruggeman, Y. Motohashi // Functiones et Approximatio. – 2003. – № 31. – P. 7–76.
2. **Жанбарбаева У. Б.** Асимптотические задачи теории чисел в секториальных областях: дис. канд. физ.-мат. наук.: 01.01.06 [текст] / У. Б. Жанбарбаева. – Алматы, 1994. – 120 с.
3. **Varbanets S. P.** General Kloosterman sums over ring of Gaussian integers [text] / S. P. Varbanets // Укр. мат. журнал. – 2007. – Т. 59, № 9. – P. 1179–1200.
4. **Kitaoka Y.** Fourier coefficients of siegel cusp forms of degree two [text] / Y. Kitaoka // Nagoya Math. J. – 1984. – № 93. – P. 149–171.