МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І.І.Мечникова
Інститут математики, економіки та механіки

кафедра комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Варбанець П.Д. Савастру О.В.

ПРАКТИКУМ
по спецкурсу
«Аналітична теорія чисел»

Одеса - 2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І.І.Мечникова
Інститут математики, економіки та механіки

кафедра комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Варбанець П.Д. Савастру О.В.

ПРАКТИКУМ
по спецкурсу
«Аналітична теорія чисел»

методичний посібник для студентів 5 курсу
факультету математики та механіки

Одеса - 2011

Автори: П.Д.Варбанець, д-р ф-м н., проф.
О.В.Савастру, к-т ф-м н., доц.

Рецензенти: В.М. Євтухов, д-р ф-м н., проф.
Г.С. Белозьоров , к-т ф-м н., доц.

Рекомендовано до друку Вченою радою Інституту математики, економіки та механіки Одеського національного університету ім. І.І.Мечникова,
протокол № 4 від 18 травня 2011 року

Зміст

1 Вступ

Дзета-функція Римана та ряди Дирихле є головною «причиною» використання потужного апарату теорії функцій комплексної змінної до розв'язання задач теорії чисел: асимптотичний закон розподілу простих чисел; проблеми Варинга та Гольдбаха; проблеми кола та дільників та інші. Так з'явилась аналітична теорія чисел — найбільш багата ідеями та методами область сучасної теорії чисел. Видатні математики XX століття Г. Харді, Дж. Литтлвуд, І.М. Виноградов, Г. Давенпорт, Л. Морделл присвятили свій талант аналітичній теорії чисел.

Труднощі для починаючих працювати в області аналітичної теорії чисел з'являються через необхідність одночасного та глибинного оволодіння знаннями по «елементарній» теорії чисел, теорії функцій дійсної та комплексної змінної, а також основами загальної алгебри.

На лабораторних роботах з аналітичної теорії чисел передбачається розв'язок теоретичних задач, які поглиблюють матеріал спеціальних курсів з теорії чисел, а також розробка спеціальних питань мультиплікативної теорії чисел, які в доступній студентам літературі лише згадуються.

Крім того, ряд задач, пов'язаних з підсумовуванням мультиплікативних функцій в арифметичній прогресії, являють науковий інтерес, а тому іх дослідження має стати темой наступних наукових занять студентів.

При виконанні лабораторної роботи студент зобов'язаний спочатку викласти основні означення і твердження, котрі безпосередньо пов'язані із завданням наданої лабораторної роботи. Ряд означень і тверджень наведені в посібнику, більшість з котрих не доведені, а тому їх доведення необхідно привести при виконанні лабораторної роботи.

2 Аналітична теорія чисел

2.1 Елементарна теорія чисел

Завдання 1. *Сформулювати принцип «ящиків Дирихле» та розв'язати наступні завдання:*

1. Диофантове рівняння $x^2 - 2y^2 = 1$ має нескінченну множину рішень.

   Вказівка. *Скористатися індукцією та врахувати, що якщо* (x_n, y_n) *— розв'язок, то* (x_{n+1}, y_{n+1}) *— також розв'язок, де* $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$*;* $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$*.*

2. Користуючись принципом найменшого натурального числа, довести алгоритм поділення, потім алгоритм Евкліда та алгоритм для знаходження усіх розв'язків рівняння $ax + by + c = 0$, де $a, b, c \in \mathbb{Z}$ — фіксовані.

3. Використовуючи принцип «ящиків Дирихле» показати, що для $\xi \in \mathbb{R}$ та $m \in \mathbb{Z}^+$ однорідна нерівність $|x - \xi y| < \frac{1}{m}, 0 < y < m$, має розв'язок в цілих числах x та y.

4. Показати, що e — (основа натурального логарифму) — число ірраціональне.

   Вказівка. *Скористатися розкладом*

   $$\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Завдання 2. *Сформулювати означення найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного скінченного числа цілих чисел в термінах теорії ідеалів та виконати наступні вправи:*

1. Довести:

   $$(a, b, c) \cdot [ab, bc, ca] = (ab, bc, ca)[a, b, c] =$$
   $$= (a, b, c) \cdot [a, b, c] \cdot [(a, b), (b, c), (c, a)] = abc.$$

2. Дана послідовність Фібоначчі:

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Довести, що $(u_m, u_n) = u_d$, де $d = (m, n)$.

3. Нехай $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Довести, що для $b \in \mathbb{Z}$ рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ має розв'язок $\Leftrightarrow$ $d = (a_1, a_2, \ldots, a_n)|b$. Причому, якщо умова розв'язуваності виконана, то існує таке рішення цього рівняння, що

$$|x_i| \leqslant |b| + (n-1)H, \qquad \text{де}\ \ H = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|).$$

Вказівка. *Скористатися лінійним зображенням $d = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а потім показати, що якщо $y_1, \ldots, y_n$ — який–небудь розв'язок даного рівняння, тоді і $x_1, \ldots, x_n$ є розв'язком, де $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$, визначаються за допомогою співвідношення*

$$y_i = q_i a_n + x_i,\ 0 \leqslant x_i < |a_n|,\ i = 1, \ldots, n-1,$$
$$x_n = y_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i q_i.$$

Завдання 3. *Провести дослідження систем лінійних диофантових рівнянь, розв'язати наведені нижче задачі.*

Твердження вправи №3 попереднього завдання не дає ефективного методу розв'язання диофантового рівняння

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b.$$

Розглянемо алгоритм R. Weinstock. Без обмеження на загальність будемо вважати, що $b = d = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Візьмемо $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}$ так, щоб

$$a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots + a_nz_n = d_1 > 0.$$

Тоді $d_1 \geqslant d$ (чому?). Якщо $d_1 = d$, тоді задача розв'язана. Інакше, існувало б a_i, що не ділиться на d_1 (чому?). Нехай $a_1 \not\vdots\, d_1$. Покладемо $a_1 = qd_1 + d_2,\ 0 < d_2 < d_1$. Візьмемо

$$z_i' = -qz_i \quad (i = 2, \ldots, n), \quad z_1' = 1 - qz_1.$$

Тоді

$$0 < d_2 = a_1z_1' + \ldots + a_nz_n' < d_1.$$

Таким чином, ми отримуємо незростаючу послідовність натуральних чисел $\geqslant d$. Тому через скінченну кількість кроків маємо $d_k = d$, а тому відповідні $z_1^{(k-1)}, \ldots, z_n^{(k-1)}$ є рішенням.

1. Розв'язати рівняння $3x - 4y + 5z = 13$.

2. Користуючись принципом «ящиків Дирихле», довести твердження:

   нехай $m < n$ і $a_{ij}\,(1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ — цілі числа, які не всі дорівнюють нулю, причому $|a_{ij}| \leqslant H,\ (1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant j \leqslant n)$. Тоді система лінійних диофантових рівнянь

   $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

   має ненульовий розв'язок, де $|x_j| \leqslant (nH)^{\frac{m}{n-m}}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

3. Знайти умову розв'язуваності системи рівнянь в цілих числах

   $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

4. Описати процедуру розв'язання системи

   $$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 6,\\ 3x + y - 2z &= 9. \end{aligned}$$

Завдання 4. *Використовуючи основні властивості конгруенцій, розв'язати задачі:*

1. Показати, що необхідною та достатньою умовою простоти натурального $p \geqslant 2$ є виконаність конгруенції

   $$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

2. Довести, що n і $n+2\,(n \geqslant 2)$ є парою «близнюків» $\Leftrightarrow$
   $4((n-1)!+1) \equiv -n \pmod{n(n+2)}$.

3. Довести, що якщо натуральне m ділиться на два різних простих непарних числа, тоді за модулем m не має первісних коренів.

   Вказівка. *Показати, що для будь–якого* a, $(a, m) = 1$

   $$a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

4. Нехай $\rho(n)$ — кількість розв'язків конгруенції

   $$ax^2 + b \equiv 0 \pmod{m}, \qquad (a, n) = 1.$$

   Показати, що $\rho(n)$ — мультиплікативна функція та знайти $\rho(n^k)$,
   $p > 2$ — просте, $k = 1, 2, \ldots$.

2.2 Арифметичні функції та добуток Дирихле

Завдання 1. *Вивчити властивості добутку Дирихле та довести наведені нижче теореми.*

Розглянемо суму

$$\sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right),$$

де $f(d)$ та $g(n)$ дві арифметичні функції. Такі суми часто зустрічаються в теорії чисел. Згадаємо, наприклад, співвідношення Гаусса для функції Ойлера $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d},$$

де $\mu(n)$ — функція Мебіуса.

Означення. Добутком (трансформацією) Дирихле двох арифметичних функцій f та g називається арифметична функція h, яка обумовлена рівністю

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right),$$

Позначення: $h = f * g$.

В подальшому через N будемо позначати функцію $N(n) = n$, через $\boldsymbol{u}$ — функцію $\boldsymbol{u}(n) = 1$ для усіх $n \in \mathbb{N}$.

Крім того, покладемо

$$I(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = 1, \\ 0, & \text{якщо } n \neq 1. \end{cases}$$

Таким чином співвідношення Гаусса позначає, що $\varphi = \mu * N$.

Теорема 1. *Добуток Дирихле комутативний та асоціативний, тобто*

$$f * g = g * f,$$
$$(f * g) * k = f * (g * k).$$

Теорема 2. *Для будь-якої арифметичної функції f маємо*

$$I * f = f * I = f,$$

тобто I грає роль одиниці.

Означення. Арифметична функція f називається оберненою по Дирихле, якщо знайдена арифметична функція f^{-1} така, що

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = I.$$

Теорема 3. *Якщо $f(1) \neq 0$, тоді f має єдину обернену по Дирихле функцію f^{-1}, причому f^{-1} можна задати наступними формулами*

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}, \quad f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \qquad \text{для } n > 1.$$

Теорема 4. *Якщо f і g — мультиплікативні функції, тоді їх добуток Дирихле також мультиплікативна функція.*

Вправа. *Довести або привести контр–приклад, що добуток Дирихле двох «full multiplicative» (FM) функцій є функція FM.*

Завдання 2. *Користуючись властивостями добутку Дирихле, розв'язати наступні задачі:*

1. Довести, що якщо f — мультиплікативна функція, то f^{-1} існує та мультиплікативна.

   Висновок. *Множина усіх мультиплікативних функцій породжує підгрупу відносно добутку Дирихле в групі усіх арифметичних функцій, які не дорівнюють нулю при $n = 1$.*

2. Довести твердження:
   Нехай f — мультиплікативна функція.
   Тоді f — FM функція $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ $n \geqslant 1$.

   Вказівка. *Скористатись співвідношенням*

   $$\sum_{d|n} \mu(d) = I(n).$$

3. Знайти μ^{-1} та φ^{-1}.

   Вказівка. *Беручи до уваги, що із $h = f * g$ випливає $h^{-1} = f^{-1} * g^{-1}$, скористатися тим, що $\varphi = \mu * N$ і N — FM функція.*

4. Нехай

   $$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha \qquad (\alpha\text{— комплексне число}).$$

   Довести, що

   $$\sigma_\alpha^{-1}(n) = \sum_{d|n} d^\alpha \mu(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Вказівка. *Врахувати, що* $\sigma_\alpha = N^\alpha * \boldsymbol{u}$ *та* N^α *і* $\boldsymbol{u}$*— FM функції.*

5. Нехай $g = U * f$. Показати, що наступні ряди збігаються до однієї суми

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n)x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)x^n}{1-x^n}.$$

Завдання 3. *Вивчити загальний добуток Дирихле.*

Означення. Нехай $F(x)$ — комплексно–значна функція у інтервалі $(0,\infty)$, причому $F(x) = 0$ для $0 < x < 1$. Узагальненим добутком Дирихле функції $F(x)$ за допомогою арифметичної функції $f(n)$ називається сума

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} f(n)F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Позначення:

$$(f \circ F)(x) = \sum_{n\leqslant x} f(n)F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Зауваження. *Якщо* $F(x) = 0$ *для усіх* x*, які не є натуральними числами, тоді*

$$(f \circ F)(m) = (f * F)(m)$$

для усіх $m \in \mathbb{N}$.

Говорити про асоціативність та комутативність узагальненого добутку Дирихле не має сенсу. Однак:

Теорема 5. *Для будь–яких арифметичних функцій* f *і* g

$$(f \circ (g \circ F))(x) = ((f * g) \circ F)(x).$$

Доведення. Для $x > 0$ маємо

$$(f \circ (g \circ F))(x) = \sum_{n\leqslant x} f(n) \cdot (g \circ F)\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n\leqslant x} f(n) \cdot \sum_{m\leqslant \frac{x}{n}} g(m)F\left(\frac{x}{mn}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{m,n \\ mn\leqslant x}} f(n)g(m)F\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{k\leqslant x}\left(\sum_{mn=k} f(n)g(m)\right)\cdot F\left(\frac{x}{k}\right) =$$

$$= \sum_{k\leqslant x}(f * g)(k) \cdot F\left(\frac{x}{k}\right) = ((f * g) \circ F)(x).$$

□

Виконати вправи:

1. Довести, що $(I \circ F)(x) = F(x)$.

2. Довести, що якщо f обернена по Дирихле, то наступні рівності еквівалентні
$$G(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) F\left(\frac{x}{n}\right), \tag{2.1}$$
$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} f^{-1}(n) G\left(\frac{x}{n}\right), \tag{2.2}$$

   Вказівка. *Із (2.1)* $\Rightarrow \quad G = f \circ F$. *Потім розглянути* $f^{-1} \circ G$ *і скористатися теоремою 5 та вправою 1.*

3. Довести, що якщо $f(n)$ — FM функція, тоді
$$G(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) F\left(\frac{x}{n}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad F(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) f(n) G\left(\frac{x}{n}\right).$$

Завдання 4. *Вивчити властивості рядів Белля та розв'язати задачі.*

Означення. Рядом Белля для арифметичної функції f і простого числа p називається формальний степеневий ряд виду
$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n) x^n.$$

1. Нехай f і g — мультиплікативні функції.
   Тоді $f = g \quad \Leftrightarrow \quad f_p(x) = g_p(x)$ для усіх простих p.

2. Знайти ряди Белля для функцій $\mu(n)$, $\varphi(n)$.

3. Довести, що рядом Белля для FM функції $f(n)$ (в області збіжності ряду) буде ряд
$$f_p(x) = \frac{1}{1 - f(p)x}.$$
   Зокрема,
$$I_p(x) = 1, \quad \boldsymbol{u}_p(x) = \frac{1}{1-x}, \quad N_p^{\alpha}(x) = \frac{1}{1 - p^{\alpha} x}.$$

4. Довести: якщо $h = f * g$, то $h_p(x) = f_p(x) \cdot g_p(x)$.

5. Нехай $f(n) = 2^{\nu(n)}$, де $\nu(n)$ — кількість різних простих дільників n. Показати, що
$$f_p(x) = \frac{1+x}{1-x}, \quad \mu_p^2(x) = 1 + x, \quad \boldsymbol{u}_p(x) = \frac{1}{1-x},$$
та опираючись на попередню теорему довести, що
$$2^{\nu(n)} = \sum_{d|n} \mu^2(d).$$

Завдання 5. *Розглянути деякі застосування добутку Дирихле.*

Означення. Похідною для арифметичної функції $f(n)$ називається арифметична функція
$$f'(n) = f(n) \log n, \qquad n \geqslant 1.$$

Приклад. $I'(n) = I(n) \log n = 0$ для усіх n. $\boldsymbol{u}'(n) = \boldsymbol{u}(n) \log n = \log n$. Нехай $\Lambda(n)$ — функція Мангольдта, тоді із відомого співвідношення
$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$$
отримаємо, $\Lambda * \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$.

Теорема 6. *Якщо f і g — арифметичні функції, тоді*

1. $(f + g)' = f' + g'$;
2. $(f * g)' = f' * g + f * g'$;
3. $(f^{-1})' = -f' * (f^{-1} * f^{-1})$, *якщо* $f(1) \neq 0$.

Вказівка. *Твердження 1 і 2 доводяться безпосередньо, а для доведення 3 необхідно продиференціювати рівність $I = f * f^{-1}$.*

Теорема 7 (**Тотожність Сельберга**). *Довести тотожність*
$$\Lambda(n) \log n + \sum_{d|n} \Lambda(d) \Lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \log^2\left(\frac{n}{d}\right).$$

Вказівка. *Продиференціювати рівність $\Lambda * \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$ та в отриманому виразі підставити замість $\boldsymbol{u}'$ його значення $\Lambda * \boldsymbol{u}$, а потім помножити обидві частини отриманої рівності на $\boldsymbol{u}^{-1} = \mu$.*

Вправа 1. *Нехай $f(n)$ — мультиплікативна. Довести:*

- $f^{-1}(p^2) = f^2(p) - f(p^2)$ *для кожного простого* p.
- $f^{-1}(n) = \mu(n) f(n)$ *для кожного безквадратного* n.

Вправа 2. *Нехай* $f(n)$ *— мультиплікативна.*
Довести, що f *—* $FM \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(p^\alpha) = 0$ *для усіх* p *та усіх цілих* $\alpha \geqslant 2$.

Вправа 3. *Нехай* $h = f * g$. *Тоді із збіжності рядів*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |g(n)|.$$

випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |h(n)|$.

Завдання 6. *Розв'язати наступні задачі:*

1. Нехай $f(x)$ визначена для усіх раціональних x, $0 \leqslant x \leqslant 1$ і нехай
$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad F_1(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
   a) Довести, що $F_1 = F * \mu$.
   b) Користуючись **a)**, довести, що
$$\mu(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} e^{2\pi i \frac{k}{n}}.$$

2. Нехай
$$h(n) = \sum_{[k,l]=n} f(k) g(l)$$
   і нехай $F = \boldsymbol{u} * f, \quad G = \boldsymbol{u} * g, \quad H = \boldsymbol{u} * h$.
   Довести, що $H(n) = F(n) \cdot G(n)$.

3. Нехай $\varphi_k(n)$ означає суму k–их степенів натуральних чисел $\leqslant n$ та взаємно простих із n. Користуючись задачею 1 показати, що
$$\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k} = \sum_{d|n} \frac{\varphi_k(d)}{d^k}.$$
   Обертаючи (по Дирихле) довести, що для $n > 1$
$$\varphi_1(n) = \frac{n}{2}\varphi(n), \qquad \varphi_2(n) = \frac{n^2}{3}\varphi(n) + \frac{n}{6}\prod_{d|n}(1-p).$$

4. Нехай $\lambda(n)$ — функція Лиувилля, тобто $\lambda(1) = 1$,
   $\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k}$, якщо $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$.
   Знайти $\lambda^{-1}(n)$ і $\lambda_p(x)$.

2.3 Середнє значення арифметичної функції

Нехай $f(n)$ —арифметична функція. Позначимо

$$\widetilde{f}(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Звичайно значення функції сильно флуктують при великих n, функція $\widetilde{f}(n)$ декілька згладжує цю флуктуацію. Наприклад, функція $d(n)$ може приймати будь–яке значення з відрізку від 2 до $\omega(n)$ ($\omega(n) \to \infty$ швидше будь–якого степеня $\log n$), а функція $\widetilde{d}(n)$ асимптотично поводиться як $\log n$, тобто $\widetilde{d}(n) \sim \log n \ \ (n \to \infty)$.

Якщо існує $\lim \widetilde{f}(n) \neq \infty$, то говорять, що $f(n)$ має середнє значення.

При вивченні $\widetilde{f}(n)$ часто використовують формули підсумовування арифметичних функцій. Найбільш поширені формула часткового підсумовування Абеля та формула Ойлера–Сонина.

Завдання 1. *Вивести формулу підсумовування Ойлера–Сонина та розв'язати задачі.*

Теорема 8 (**Формула підсумовування Ойлера–Сонина**). *Якщо $f(t)$ має безперервну похідну на інтервалі $[a, b]$, $0 < a < b$, тоді*

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b (t-[t])f'(t)dt +$$
$$+f(b)([b]-b) - f(a)([a]-a).$$

Довести, що при $x \geqslant 1$:

$$1. \qquad \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} = \log x + c + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$2. \qquad \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O\left(x^{-s}\right),$$

де $\zeta(s)$ — дзета–функція Римана, $s > 0$, $s \neq 1$.

$$3. \qquad \sum_{n>x} \frac{1}{n^s} = O\left(x^{1-s}\right), \quad s > 1.$$

$$4. \qquad \sum_{n\leqslant x} n^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O\left(x^{\alpha}\right), \quad \alpha \geqslant 0.$$

В тих випадках, коли формулу Ойлера–Сонина безпосередньо використати неможливо (наприклад, $f(n)$ визначена тільки на натуральних числах), необхідно провести допоміжні перетворення.

Наприклад, якщо врахувати, що

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d},$$

то

$$\sum_{n\leqslant x} \varphi(n) = \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d} = \sum_{\substack{m,d\\ md\leqslant x}} \mu(d)m = \sum_{d\leqslant x}\mu(d)\sum_{m\leqslant \frac{x}{d}} m =$$

$$= \sum_{d\leqslant x}\mu(d)\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{d}\right)^2 + O\left(\frac{x}{d}\right)\right\} = \frac{x^2}{2}\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(x\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(x^2\sum_{d>x}\frac{1}{d^2}\right) + O\left(x\log x\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\zeta^{-1}(2) + O\left(x\log x\right) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O\left(x\log x\right).$$

5. Користуючись тим, що

$$\frac{1}{\varphi(n)} = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{d},$$

показати, що

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\varphi(n)} = c_1\log x + c_2 + O\left(x^{-1}\log x\right).$$

Завдання 2. *Сформулювати формулу підсумовування Абеля і з її допомогою розв'язати задачі попереднього завдання. Крім того, довести:*

$$1. \qquad \sum_{d|n}\nu(d) = \sum_{p|n} d\left(\frac{n}{p}\right).$$

$$2. \quad \textit{Якщо} \quad b(n) = \sum_{r=1}^{n}(r,n), \quad \textit{тоді} \quad (b * \boldsymbol{u})(n) = nd(n).$$

$$3. \qquad \sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,m)=1}} 1 = \frac{\varphi(m)}{m}x + O\left(d(m)\right).$$

$$4. \quad \textit{Якщо} \quad \sigma(n) = \sum_{d|n} d, \quad \textit{тоді} \quad \sigma(n) = O(n \log n).$$

$$5. \quad \sigma(n)\varphi(n) \geqslant cn^2, \quad \textit{де} \quad c \geqslant \frac{6}{\pi^2}.$$

Вказівка. *Розглянути*

$$\frac{\sigma(n)\varphi(n)}{n^2} = \prod_{p^\alpha || n} \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot p^{\alpha-1}(p-1)p^{-2\alpha} = \prod_{p^\alpha || n} \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+1}}\right).$$

Завдання 3. *Користуючись властивостями узагальненого добутку Діріхле, довести теореми:*

Теорема 9. *Якщо* $h = f * g$ *і*

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n), \quad G(x) = \sum_{n \leqslant x} g(n), \quad H(x) = \sum_{n \leqslant x} h(n),$$

тоді

$$H(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) G\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leqslant x} g(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Вказівка. *Ввести функцію*

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \textit{якщо } x \geqslant 1, \end{cases}$$

скористатися рівностями $F = f \circ U, \quad G = g \circ U$ *і розглянути* $f \circ G$ *і* $g \circ F$.

Теорема 10. *Якщо*

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n), \quad \textit{то}$$

$$\sum_{n \leqslant x} \sum_{d|n} f(d) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n \leqslant x} F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Розв'язати задачі:

1. Довести, що при $x \geqslant 2$

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right]^2 = \frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x \log x).$$

Вказівка. *Потрібно скористатися теоремою 9 і взяти до уваги, що*

$$\frac{1}{2} \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right]^2 + \frac{1}{2} = \sum_{n \leqslant x} \varphi(n).$$

2. Довести, що при $x \geqslant 2$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \left[\frac{x}{n}\right] = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\log x).$$

Вказівка. *Застосувати теорему 10 і взяти до уваги, що*

$$\frac{1}{2} \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n \leqslant x} \frac{\varphi(n)}{n}.$$

2.4 Метод гіперболи

Добре відомо, що суматорна функція дільників

$$D(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau(n)$$

має геометричну інтерпрітацию. Вона означає кількість цілих точок $(k, m) \in \mathbb{N}^2$ під гіперболою $km \leqslant x$. Отримання асимптотичної оцінки для $D(x)$ при $x \to \infty$ має назву "проблема Дирихле". Це окремий випадок загальної проблеми про число цілих точок у області, яка обмежена кривою $y = f(x)$, де $f(x)$ – безперервна, невід'ємна на відрізку $[a, b]$ функція, та прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Тоді кількість точок дорівнює

$$\sum_{a<n \leqslant b} [f(n)] = \sum_{a<n \leqslant b} f(n) - \sum_{a<n \leqslant b} \{f(n)\}.$$

Виникають наступні два завдання:

- знаходження першої суми (наприклад, за допомогою формули підсумовування Ойлера–Сонина);
- потрібно отримати асимптотичну оцінку для другої суми, а це зробити досить складно.

Але при рішенні проблеми дільників ми можемо зробити інакше. Користуючись симетрією в рівнянні $km = n$ можна побачити, що

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n) = 2 \sum_{m \leqslant \sqrt{x}} \left[\frac{x}{m}\right] - [\sqrt{x}]^2.$$

Цей прийом отримав назву метод гіперболи.
Далі маємо

$$D(x) = 2x \sum_{m \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{m} - 2 \sum_{m \leqslant \sqrt{x}} \left\{\frac{x}{m}\right\} - x + 2\sqrt{x}\{\sqrt{x}\} + O(1).$$

Враховуючи, що

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}=\log x+c+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

де c – постійна Ойлера, і використовуючи оцінку

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\left\{\frac{x}{m}\right\}=O(\sqrt{x}),$$

маємо

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=x(\log x+2c-1)+O(\sqrt{x}).$$

Завдання 1. *Користуючись методом гіперболи отримати асимптотичну формулу для числа цілих точок у колі (проблема Гаусса)*

$$\sum_{n\leqslant x}r(n)=\pi x+O(\sqrt{x}).$$

Завдання 2. *Метод гіперболи добре працює при розв'язанні завдання про кількість цілих точок у шарі розміру 4.*

1. *Відомо, що кожне натуральне число може бути представлено сумою чотирьох квадратів, тобто $r_4(n)>0$. Навести доведення цього твердження.*

2. *Довести, що для будь-якого $x\geqslant 1$*

$$\sum_{n\leqslant x}r_4(n)=\frac{1}{2}(\pi x)^2+O(x\log x).$$

Вказівка. *Взяти до уваги, що*

$$r_4(n)=8(2+(-1)^n)\sum_{d|n,\,d-\text{непарне}}d,$$

$$\sum_{d|n,\,d-\text{непарне}}d=\frac{x^2}{2m^2}+O\left(\frac{x}{m}\right).$$

Завдання 3. *Довести наступні твердження.*

1. *Для будь-якого $x\geqslant 1$*

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_1(n)=\frac{1}{2}\zeta(2)x^2+O(x\log x).$$

2. Якщо $x \geqslant 1$ та $\alpha > 1$, $\alpha \neq 1$

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma_\alpha(n) = \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + O(x^\beta),$$

де $\beta = \max\{1, \alpha\}$.

Завдання 4. *Нехай $1 \leqslant a \leqslant b$ – фіксовані цілі.
Розглянемо несиметричну функцію дільників*

$$\tau_{ab}(n) = \sum_{\substack{n_1^a n_2^b = n \\ n_1, n_2 \in \mathbb{N}}} 1.$$

Знайти асимптотичні формули для наступних функцій при $x \geqslant 1$

$$\sum_{n \leqslant x} \tau_{12}(n), \qquad \sum_{n \leqslant x} \tau_{23}(n).$$

2.5 Ряди Дирихле

Означення. Нехай $f(n)$ — арифметична функція. Рядом Дирихле з коефіцієнтами $f(n)$ називають ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \qquad s = \sigma + it \in \mathbb{C}.$$

Ряд Дирихле характеризується полуплощиною збіжності, абсцисою збіжності σ_c і абсцисою абсолютної збіжності σ_a. Відомо, що $0 \leqslant \sigma_a - \sigma_c \leqslant 1$. В полуплощині збіжності ряд Дирихле визначає аналітичну функцію.

Завдання 1. *Сформулювати теорему про збіжність ряду Дирихле в кутовій області і вивести основні висновки із неї. Крім того, вивчити наведену нижче теорему і розв'язати запропоновані задачі.*

Теорема 11. *Нехай ряди Дирихле*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \qquad i \qquad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

*абсолютно збігаються при $\sigma > \sigma_a$. Якщо $F(s) = G(s)$ для кожного s із нескінченної послідовності $\{s_k\}$, такої, що $\sigma_k \to +\infty$ при $k \to \infty$,
тоді $f(n) = g(n)$, $n = 1, 2, \ldots$*

Доведення. Нехай $h(n) = f(n) - g(n),\ H(s) = F(s) - G(s)$.
Тоді $H(s_k) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$. Доведемо, що $h(n) = 0,\ n = 1, 2, \ldots$.
Нехай $h(n) \neq 0$ для деякого n. Нехай N — найменше з тих n, для яких $h(n) \neq 0$.
Тоді

$$H(s) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \frac{h(N)}{N^s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

А отже,

$$h(N) = N^s H(s) - N^s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Зокрема,

$$h(N) = -N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^{s_k}}.$$

Візьмемо k таким, щоб $\sigma_k \geqslant c > \sigma_a$. Тоді

$$|h(N)| \leqslant N^{\sigma_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{n^{\sigma_k}} \leqslant N^{\sigma_k}(N+1)^{-(\sigma_k - c)} \sum_{n=N+1}^{\infty} |h(n)| n^{-c} =$$

$$= \left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k} \cdot A,$$

де A не залежить від k.
Але при $k \to \infty$ маємо

$$\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k} \to 0,$$

тобто $h(N) = 0$, що суперечливо. □

Розв'язати задачі:

1. Нехай
$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \qquad \text{і} \qquad F(s) \neq 0$$
для деякого s, $Res = \sigma > \sigma_a$. Тоді знайдеться $c \geqslant \sigma_a$, таке, що у полуплощині $\sigma > c$ маємо $F(s) \neq 0$.

2. Нехай
$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$
збігається абсолютно при $\sigma > \sigma_a$ і нехай $f(n)$ — FM функція. Тоді ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^s}$$

збігається абсолютно при $\sigma > \sigma_a$, тобто в цій області

$$\frac{1}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^s}.$$

Вказівка. *Врахувати, що* $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$.

3. Знайти похідний ряд Дирихле для функції Ойлера $\varphi(n)$.

   Вказівка. *Взяти до уваги, що* $N = \boldsymbol{u} * \varphi$ *і розглянути відповідні ряди Дирихле.*

Завдання 2. *Сформулювати умови, при яких має місце тотожність Ойлера та довести наступні тотожності:*

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{\alpha-s})}\ , \qquad \sigma > \max\left(1; 1+Re(\alpha)\right).$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1+p^{-s}}\ , \qquad \sigma > 1.$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} = \prod_p \frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}\ , \qquad \sigma > 1.$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varkappa(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1-p^{-s}+p^{-2s}}{(1-p^{-s})^2}\ , \qquad \sigma > 1.$$

Завдання 3. *Сформулювати лему Абеля про часткове підсумовування і, користуючись нею, отримати наведені нижче інтегральні зображення рядів Дирихле. Указати області збіжності відповідних інтегралів.*

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = s\int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}}\, dx.$$
2. $$\sum_p \frac{1}{p^s} = s\int_1^{\infty} \frac{\pi(x)}{x^{s+1}}\, dx.$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = s\int_1^{\infty} \frac{M(x)}{x^{s+1}}\, dx, \quad M(x) = \sum_{n\leqslant x} \mu(n).$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = s\int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\, dx.$$

5. *Довести, що якщо*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

де $f(n)$ — FM функція, тоді у полуплощині абсолютної збіжності ряду Дирихле $F(s)$ справедлива рівність

$$F(s) = e^{G(s)}, \qquad \text{де} \quad G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)\Lambda(n)}{\log n} n^{-s}.$$

Завдання 4. *Користуючись результатами завдання 2 довести, що при $\sigma > 1$ справедливі рівності:*

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}.$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^s} = \zeta(s) \sum_{p} \frac{1}{p^s}.$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}.$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta^2(s)}.$$
5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varkappa(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)},$$

де $\varkappa(n) = a_1 \ldots a_n$, якщо $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$.

Завдання 5. *Розглянути спеціальні випадки тотожності Ойлера.*

1. Довести, що при $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\nu(n)}\varkappa(n)}{n^s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(3s)}.$$

2. Нехай $f(n)$ — FM функція, така що $f(p) = (f(p))^2$ для кожного p. Якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

збігається абсолютно для $\sigma > \sigma_a$ і має суму $F(s)$, тоді $F(s) \neq 0$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\lambda(n)}{n^s} = \frac{F(2s)}{F(s)}$$

для усіх $\sigma > \sigma_a$.

3. Довести, що
$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ (m,n)=1}}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2} = \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)}.$$

Завдання 6. *Сформулювати лему про комплексне обернення рядів Дирихле и довести ряд аналогічних тверджень:*

1. Нехай
$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = x + O(x), \quad F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$
Тоді ряд Дирихле $F(s)$ збігається при $Res > 1$ і , крім того,
$$\lim_{s \to 1} (s-1) F(s) = 1.$$

2. Нехай
$$\sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n} = \log x + O(\log x),$$
тоді ряд Дирихле
$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$
збігається при $Res > 1$ і $\lim_{s \to 1} (s-1) F(s) = 1$.

3. Використовуючи задачу 1 завдання 4 та оцінки $\zeta(s)$ у критичній смузі, знайти асимптотичну формулу для суми
$$\sum_{n \leqslant x} d(n^2).$$

Завдання 7. *Сформулювати основні властивості характерів Дирихле. Дати структурний опис характеру Дирихле за модулем m. Привести повне* *доведення наведеної нижче теореми та довести за аналогією асимптотичну формулу*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \nu(n)=m\\ n\equiv b \pmod D\\ (b,D)=1}} 1 = \left(\frac{1}{\varphi(D)(m-1)!}+O(1)\right)\frac{x(\log\log x)^{m-1}}{\log x}, \quad (m=1,2,\ldots).$$

Теорема 12. *При фіксованому m та $x\to\infty$ справедлива асимптотична формула*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \nu(n)=m}} 1 = \left(\frac{1}{(m-1)!}+O(1)\right)\frac{x(\log\log x)^{m-1}}{\log x}.$$

Доведення. Розглянемо функцію для $|z|\leqslant \frac{1}{2}$, $Res>1$:

$$F(s,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{\nu(n)}}{n^s}=\sum_{k=1}^{\infty}z^k\sum_{\nu(n)=k}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{z^{\nu(p)}}{p^s}+\frac{z^{\nu(p^2)}}{p^{2s}}+\ldots\right)=$$
$$=\prod_p\left(1+\frac{z}{p^s-1}\right).$$

Звідси

$$F(s,z)=\exp\left\{z\sum_p\frac{1}{p^s-1}\right\}\cdot\exp\left\{\sum_p\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j}\frac{z^j}{(p^s-1)^j}\right\}.$$

Позначимо

$$h_j(s)=\frac{(-1)^j}{j}\frac{1}{(p^s-1)^j}\,, \qquad j=2,3,\ldots$$

Ясно, що при $Res\geqslant 1$, $|h_j(s)|\leqslant B, B>0$ — стала. Крім того, маємо

$$\sum_p\frac{1}{p^s-1}=\sum_p\frac{1}{p^s}+\sum_p\frac{1}{p^s(p^s-1)}=\log\frac{1}{s-1}+h_1(s)\quad (\text{чому?})$$

Тоді

$$F(s,z)=\exp\left\{z\log\frac{1}{s-1}\right\}\cdot\exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty}h_j(s)z^j\right\}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\log^k\frac{1}{s-1}}{k!}z^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\sum_{j=1}^{\infty}h_j(s)z^j\right)^l=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k\log^k\frac{1}{s-1}}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}g_l(s)z^l,$$

де $g_i(s)$ — голоморфні при $Res \geqslant 1$, $g_0(s) = 1$ (чому?).

Таким чином,

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{\nu(n)=k} \frac{1}{n^s} = F(s,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} g_{k-n}(s) \log^n \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{n!} \right) z^k.$$

Тому

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \nu(n)=k}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} g_{k-n}(s) \log^n \frac{1}{s-1}.$$

А зараз користуємось формулою комплексного обернення. □

Завдання 8. *Вивчити розподіл безквадратних чисел в натуральному ряду, розв'язавши наступні задачі:*

a) Довести, що

$$\mu^2(n) = \sum_{d^2 | n} \mu(d).$$

b) Побудувати похідний ряд Дирихле для $\mu^2(n)$.

c) «Елементарними» методами отримати асимптотичну формулу для числа безквадратних чисел в «шарі».

d) Застосовуючи комплексне обернення, отримати асимптотичну оцінку суми

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv l \pmod{D}}} \mu^2(n).$$

2.6 Тригонометричні суми

Означення. Тригонометричною сумою будемо називати вираз виду

$$\sum_{n=P+1}^{Q} e^{2\pi i f(n)},$$

де P, Q — невід'ємні цілі числа, а $f(x)$ — дійсно–значна функція.

Завдяки работам Г.Вейля, Л.Морделла і, особливо, І.М.Виноградова та його учнів, тригонометричні суми являють важливий засіб в розв'язанні складних задач теорії чисел.

Завдання 1. *Вивчити лінійні тригонометричні суми, розглянути деякі їх застосування.*

1. Довести, що для $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\left|\sum_{x=P+1}^{Q} e^{2\pi i \alpha x}\right| \leqslant \min\left(Q-P, \frac{1}{2(\alpha)}\right),$$
де (α) — відстань α до найближчого цілого числа.

2. Користуючись виразом
$$\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i \frac{\alpha x}{N}} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha \equiv 0 \pmod N, \\ 0, & \text{для усіх інших.} \end{cases},$$
довести теорему про число розв'язків системи конгруенцій
$$a_i x \equiv b_i \pmod{m_i}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

3. Розкласти функцію $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, якщо x — неціле; $\psi(x) = 0 - \frac{1}{2}$, якщо $x \in \mathbb{Z}$, в ряд Фур'є, а потім апроксимувати цей ряд тригонометричною сумою.

Завдання 2. *Дослідити суми Гаусса.*

Означення. Сума виду
$$\sum_{x=1}^{D} e^{2\pi i \frac{a x^2}{D}},$$
називається сумою Гаусса і позначається $S(a, D)$

1. Довести, що при $(a, p) = 1,\ p > 2$ — просте
$$S(a, p) = \left(\frac{a}{p}\right) S(1, p),$$
де $\left(\frac{a}{p}\right)$ — символ Лежандра.

2. Довести
$$|S(a, p)| = \sqrt{p}.$$

3. Обчислити $S(a, p)$ і $S(a, p^\alpha)$.

4. Довести мультиплікативну властивість сум Гаусса.

Завдання 3. *Вивчити розподіл квадратичних лишків в натуральному ряду*

1. Вивчити суму
$$S = \sum_{x=1}^{p-1} (-1)^{ind\, x} e^{2\pi i \frac{ax^2}{p}}.$$

2. Довести теорему Виноградова– Пойа:
$$\sum_{\substack{a=1 \\ \left(\frac{a}{p}\right)=1}}^{T} 1 = \frac{1}{2}T + O(\sqrt{p \log p}), \quad 1 < T \leqslant p.$$

Завдання 4. *Дослідити суму Клостермана*
$$K(u,v) = \sum_{\substack{x=1 \\ (x,D)=1}}^{D} e^{2\pi i \frac{ux+vx'}{D}}.$$

x' *визначається із конгруенції* $xx' \equiv 1 (\mathrm{mod}\ D)$.

1. Знайти p–адичний опис розв'язків конгруенції
$$xx' \equiv 1 \pmod{p^k}, \qquad k > 1.$$

2. Знайти точне значення суми Клостермана
$$\sum_{\substack{x=1 \\ (x,p)=1}}^{p^k} e^{2\pi i \frac{x+x'}{p^k}}.$$

3. Знайти зв'язок між $K(u,v)$ і $K(1,1)$.

Завдання 5. *Вивчити неповні тригонометричні суми.*

1. Знайти формулу зв'язку неповної та повної тригонометричних сум $\sum e^{2\pi i f(n)}$ на випадок періодичної функції $f(n)$.

2. Знайти оцінку неповної суми Гаусса
$$\sum_{x \leqslant T} e^{2\pi i \frac{ax^2}{D}}, \qquad 1 < T < D.$$

3. Привести нове доведення теореми Виноградова– Пойа.

Бібліоґрафія

[1] **Виноградов И. М.** Избранные труды /Виноградов И. М. – М.: Наука, 1972.

[2] **Карацуба А.А.** Основы аналитической теории чисел /Карацуба А.А. – М.: Наука, 1975.

[3] **Прахар К.** Распределение простых чисел /Прахар К. – М.: Мир, 1967.

[4] **Виноградов И. М.** Избранные труды /Виноградов И. М. – М.: Изд. АН СССР, 1952.

[5] **Постникова Л.П.** Тригонометрические суммы и сравнения по простому модулю /Постникова Л.П. – М.: Изд. МГПИ им. Ленина, 1973.