Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 27–34

УДК 517.548

О. В. Онищук
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

РАЗЛОЖЕНИЕ ГОЛОМОРФНОГО ВЕКТОРА В РЯД ЛОРАНА

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
з математичних проблем механіки і математичної фізики ОНУ 21.03.2003 р.

Для голоморфного вектора (H-регулярної функції, розв'язку системи Моісіла – Теодореску) одержано розвинення в ряд Лорана. Всі члени ряду є добутками голоморфних векторів і констант (кватерніонів).

Для голоморфного вектора (H-регулярной функции, решения системы Моисила – Теодореску) получено разложение в ряд Лорана. Все члены ряда являются произведениями голоморфных векторов и констант (кватернионов).

The Laurent series expansion for a holomorphic vector (H-regular function, Moisil – Teodorescu system solution) is obtained. All terms of the series are the products of a holomorphic vectors and constants (quaternions).

Введение. Теория пространственных голоморфных векторов (кватернионный анализ) является обобщением комплексного анализа на случай отображений $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Подробному изложению этой теории и ее приложений посвящена монография [1]. Ниже продолжаются исследования, начатые автором в работе [2], и существенно используются результаты этой работы. Кроме того, в [2] приведен развернутый обзор состояния проблемы.

В качестве ряда Лорана в [1] приведено разложение, которое в обозначениях работы [2] имеет вид:

$$\mathbf{u}(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_n\left(\vec{a}, \vec{\theta}\right) \left|\vec{x}-\vec{a}\right|^n + \sum_{n=-\infty}^{-2} \mathbf{u}_n\left(\vec{a}, \vec{\theta}\right) \left|\vec{x}-\vec{a}\right|^n, \ \vec{\theta} = \vec{\theta}(\vec{x}) = \left(\vec{x}-\vec{a}\right) / \left|\vec{x}-\vec{a}\right|. \quad (0.1)$$

Такая форма записи может быть использована при доказательстве некоторых теорем, однако для приложений более удобен вариант

$$\mathbf{u}(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{v}_n^k\left(\vec{x}-\vec{a}\right) \Diamond \mathbf{c}_n^k - \sum_{n=-\infty}^{-2} \sum_{k=0}^{-n-2} \mathbf{v}_n^k\left(\vec{x}-\vec{a}\right) \Diamond \mathbf{c}_n^k, \quad (0.2)$$

где $\mathbf{v}_n^k(\vec{x})$ – голоморфные векторы, однородные степени $n = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, $\mathbf{c}_n^k$ – константы. В работе [2] построен ряд Тейлора, соответствующий первому слагаемому в (0.2), то есть построены $\mathbf{v}_n^k(\vec{x})$ и получены выражения для $\mathbf{c}_n^k$ для случая $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Целью предлагаемой статьи является построение $\mathbf{v}_n^k(\vec{x})$ и получение выражений для $\mathbf{c}_n^k$ для случая $n = \ldots, -3, -2$. Существенного упрощения доказательств и выкладок по сравнению с [2] удалось достичь благодаря иному подходу к построению систем гармонических функций и записи операций над кватернионами в бикомплексной форме.

1. Системы гармонических функций. Запишем уравнение Лапласа в сферических координатах R,θ,φ (см. [3, стр. 290–291]):

$$\Delta_{R\theta}\, u+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\ \text{, где }\ \Delta_{R\theta} u\equiv\sin^2\theta\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\,\frac{\partial u}{\partial R}\right)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right). \tag{1.1}$$

При разделении переменных для уравнения (1.1) получаются системы гармонических функций, однородных степени $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ (см. [3, стр. 373–376]):

$$U_n^m(\vec{x})=a_n^m R^n P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}=C_n^m(\vec{x})+iS_n^m(\vec{x}),\quad \vec{x}\in\mathbb{R}^3, \tag{1.2}$$

$$C_n^m(\vec{x})=a_n^m R^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\quad S_n^m(\vec{x})=a_n^m R^n P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\,,\, P_n^m=P_{n,m}\,.$$

Пусть $\vec{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3\in\mathbb{R}^3$. Следуя [4,5], перейдем к новым переменным

$$z_1=x_1+ix_2=re^{i\varphi},\ z_2=2x_3,\ z_3=-x_1+ix_2=-re^{-i\varphi},\ r^2=x_1^2+x_2^2=-z_1z_3 \tag{1.3}$$

Если в (1.2) положить

$$a_n^m=2^n(-1)^m\left[(n+1)_m\right]^{-1}, \tag{1.4}$$

то для функций U_n^m будут иметь место простые формулы дифференцирования

$$\frac{\partial U_n^m}{\partial z_s}=nU_{n-1}^{m+s-2},\quad s=1,2,3 \tag{1.5}$$

и рекуррентные соотношения

$$U_{n+1}^m=z_1U_n^{m-1}+z_2U_n^m+z_3U_n^{m+1}\,. \tag{1.6}$$

Формулы (1.5),(1.6) доказаны в [4] для $n=0,1,2,\ldots;\ m=-n,\ldots,n$ и в [5] для $n=-(l+1)$; $l=0,1,2,\ldots;\ m=-l,\ldots,l$. Доказательство в [4,5] основывалось на использовании свойств присоединенных функций Лежандра P_n^m и было довольно громоздким.

В работе [6, п. 11.5.1] изложен способ построения системы гармонических функций, однородных степени $n=0,1,2,\ldots$. Ниже этот способ распространяется на случай $n=-1,-2,-3,\ldots$. При этом получаются простые доказательства формул (1.5),(1.6).

Следующая лемма позволяет прояснить суть проводимых ниже построений.

Лемма 1. *Если функция* $u(R,\theta,\varphi)$ *удовлетворяет уравнению* (1.1) *в некоторой торообразной области* $V=\left\{\vec{x}:(R,\theta)\in V_2\subset\mathbb{R}^2,\ \varphi\in[0,2\pi]\right\}\subset\mathbb{R}^3$,

$$v_m(R,\theta,\varphi)=a_m(\varphi)\int_0^{2\pi}u(R,\theta,\psi)b_m(\psi)\,d\psi\,, \tag{1.7}$$

$$a_m(\varphi)=A_1e^{im\varphi}+A_2e^{-im\varphi},\ b_m(\psi)=B_1e^{im\psi}+B_2e^{-im\psi}, \tag{1.8}$$

то при $m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ *и любом выборе* A_1,A_2,B_1,B_2 *функции* (1.7) *удовлетворяют уравнению* (1.1) *в области* V *(возможно, за исключением лучей* $\theta=0$ *и* $\theta=\pi$*).*

Доказательство. Вычислим

$$\Delta_{R\theta}\,v_m+\frac{\partial^2 v_m}{\partial\varphi^2}=a_m(\varphi)\int_0^{2\pi}\Delta_{R\theta}u(R,\theta,\psi)b_m(\psi)\,d\psi+\frac{d^2a_m}{d\varphi^2}\int_0^{2\pi}u(R,\theta,\psi)b_m(\psi)\,d\psi=$$

$$=a_m(\varphi)\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\right)b_m(\psi)\,d\psi+\frac{d^2a_m}{d\varphi^2}\int_0^{2\pi}u(R,\theta,\psi)b_m(\psi)\,d\psi=$$

$$= \int_0^{2\pi} u(R,\theta,\psi)\left[a_m(\varphi)\left(-\frac{\partial^2 b_m}{\partial\psi^2}\right)+\frac{d^2 a_m}{d\varphi^2}b_m(\psi)\right]d\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} u(R,\theta,\psi)\left[a_m(\varphi)m^2 b_m(\psi)+\left(-m^2 a_m(\varphi)\right)b_m(\psi)\right]d\psi = 0 .$$

Первое равенство очевидно, во втором использовано уравнение (1.1), третье равенство получено интегрированием по частям (внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль за счет периодичности с периодом 2π функций $b_m(\psi)$ при $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$), четвертое равенство получено дифференцированием формул (1.8).

Лемма доказана.

Пусть x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты точки $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, связанные со сферическими координатами R, θ, φ соотношениями $x_1 = R\sin\theta\cos\varphi,\ x_2 = R\sin\theta\sin\varphi,\ x_3 = R\cos\theta$. Возьмем

$$u(R,\theta,\varphi) = u_n(R,\theta,\varphi) = \left[2\left(x_3 + ix_2\right)\right]^n = \left(z_1 + z_2 + z_3\right)^n . \tag{1.9}$$

В последнем равенстве использованы формулы (1.3).

Функции (1.9) – однородные степени $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. При $n = 0, 1, 2, \ldots$ они являются гармоническими во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ и в лемме 1 можно брать $V = \mathbb{R}^3$. При $n = -1, -2, -3, \ldots$ из области гармоничности нужно исключить прямую $x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_1 \in (-\infty, \infty)$ и в лемме 1 можно брать полупространства $x_3 > 0$ и $x_3 < 0$. При этом лемма 1 позволяет из простых гармонических функций (1.9) двух переменных x_2, x_3 получить систему гармонических функций трех переменных x_1, x_2, x_3:

$$v_{n,m}(\vec{x}) = e^{im\varphi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[2\left(x_3 + ix_2\right)\right]^n e^{-im\psi}d\psi = e^{im\varphi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(z_1 + z_2 + z_3\right)^n e^{-im\psi}d\psi . \tag{1.10}$$

В результате несложных преобразований можно от выражений (1.10) перейти к выражениям, которые при $n = 0, 1, 2, \ldots$ были использованы в [7, гл. VII, § 2, п. 94] как исходный пункт для построения системы сферических функций (см. также [8, пп. 59,62]). Далее можно доказать совпадение функций (1.10) с функциями (1.2),(1.4). Однако простых доказательств формул (1.5),(1.6) при этом получить не удается. Поэтому укажем еще один с п о с о б   п о л у ч е н и я из функций (1.9) системы гармонических функций трех переменных x_1, x_2, x_3, совпадающей с (1.10).

Воспользуемся тем, что гармоническими будут также функции

$$u_n(R,\theta,\varphi+\alpha) = \left(z_1 e^{i\alpha} + z_2 + z_3 e^{-i\alpha}\right)^n = \left(z_1\tau + z_2 + z_3\tau^{-1}\right)^n,\quad \tau = e^{i\alpha}, \tag{1.11}$$

получающиеся из (1.9) при повороте системы координат вокруг оси x_3 на угол $-\alpha$.

Сначала рассмотрим с л у ч а й $n = 0, 1, 2, \ldots$. Выполним возведение в степень n и соберем множители при одинаковых степенях τ:

$$\left(z_1\tau + z_2 + z_3\tau^{-1}\right)^n = \sum\nolimits_{m=-n}^{n} w_{n,m}(\vec{x})\tau^m = \sum\nolimits_{m=-n}^{n} w_{n,m}(\vec{x})e^{im\alpha} . \tag{1.12}$$

При этом $w_{n,m}(\vec{x}) = f_{n,m}(r, z_2)e^{im\varphi}$.

Формулу (1.12) примем за о п р е д е л е н и е гармонических многочленов $w_{n,m}(\vec{x})$.

При $\alpha = 0,\ \tau = 1$ формула (1.12) принимает вид

$$\left(z_1 + z_2 + z_3\right)^n = \sum\nolimits_{m=-n}^{n} w_{n,m}\left(\vec{x}\right) = \sum\nolimits_{m=-n}^{n} f_{n,m}\left(r, z_2\right) e^{im\varphi}\ . \tag{1.13}$$

Непосредственным интегрированием этой формулы получаем

$$e^{im\varphi} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(z_1 + z_2 + z_3\right)^n e^{-im\psi} d\psi = w_{n,m}\left(\vec{x}\right), \tag{1.14}$$

где под интегралом φ заменяется на ψ и сумма по m на сумму по l.

Сравнивая (1.10) и (1.14), получаем равенство $w_{n,m}\left(\vec{x}\right) = v_{n,m}\left(\vec{x}\right)$.

Определение гармонических многочленов $w_{n,m}\left(\vec{x}\right)$ с помощью *производящей функции* (1.12) только в обозначениях незначительно отличается от определения работы [6, п. 11.5.1]. Оно является наиболее удобным для доказательства соотношений (1.5),(1.6) и им подобных.

Теперь рассмотрим случай $n = -1, -2, -3, \dots$. В этом случае вместо (1.12) для определения гармонических функций $w_{n,m}\left(\vec{x}\right)$ будем использовать разложение

$$\left(z_1\tau + z_2 + z_3\tau^{-1}\right)^n = \sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty} w_{n,m}\left(\vec{x}\right)\tau^m = \sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty} w_{n,m}\left(\vec{x}\right) e^{im\alpha}\ . \tag{1.15}$$

Ряд (1.15) является рядом Лорана по переменной τ для функций (1.11):

$$\left(z_1\tau + z_2 + z_3\tau^{-1}\right)^n \equiv \Phi_n\left(\vec{x}, \tau\right) \equiv \Phi_n\left(x_1, x_2, x_3, \tau\right) \equiv f_n\left(\tau\right). \tag{1.16}$$

Корни уравнения

$$z_1\tau + z_2 + z_3\tau^{-1} \equiv \tau^{-1}\left(z_1\tau^2 + z_2\tau + z_3\right) = 0 \tag{1.17}$$

равны:

$$\tau_1 = \frac{-z_2 + 2R}{2z_1} = \frac{-x_3 + R}{x_1 + ix_2} = \frac{x_1 - ix_2}{x_3 + R} = \tau_1\left(\vec{x}\right),$$

$$\tau_2 = \frac{-z_2 - 2R}{2z_1} = \frac{-x_3 - R}{x_1 + ix_2} = \frac{x_1 - ix_2}{x_3 - R} = \tau_2\left(\vec{x}\right). \tag{1.18}$$

Здесь использованы формулы (1.3) и тождества

$$D = z_2^2 - 4z_1z_3 = 4\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) = 4R^2,$$

$$\left(R + x_3\right)\left(R - x_3\right) = R^2 - x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + ix_2\right)\left(x_1 - ix_2\right).$$

Точки τ_1 и τ_2 являются полюсами порядка $-n = 1, 2, 3, \dots$ для функций $f_n\left(\tau\right)$.

Если $x_3 > 0$, то $\left|\tau_1\right| < 1 < \left|\tau_2\right|$ и разложение (1.15) сходится в кольце $\left|\tau_1\right| < \left|\tau\right| < \left|\tau_2\right|$.

Если $x_3 < 0$, то $\left|\tau_2\right| < 1 < \left|\tau_1\right|$ и разложение (1.15) сходится в кольце $\left|\tau_2\right| < \left|\tau\right| < \left|\tau_1\right|$.

Для $n = -1$ получаем

$$f_{-1}\left(\tau\right) = \frac{1}{z_1\tau + z_2 + z_3\tau^{-1}} = \frac{\tau}{2R}\left(\frac{1}{\tau - \tau_1} - \frac{1}{\tau - \tau_2}\right) = \tag{1.19}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2R}\left(\sum\limits_{m=-\infty}^{0} \tau_1^{-m}\tau^m + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \tau_2^{-m}\tau^m\right) & \text{при } x_3 > 0 \\ -\dfrac{1}{2R}\left(\sum\limits_{m=-\infty}^{0} \tau_2^{-m}\tau^m + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \tau_1^{-m}\tau^m\right) & \text{при } x_3 < 0 \end{cases} = \sum_{m=-\infty}^{0} w_{-1,m}\left(\vec{x}\right)\tau^m + \sum_{m=1}^{\infty} w_{-1,m}\left(\vec{x}\right)\tau^m\ .$$

В частности,

$$w_{-1,0}\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{2R}\operatorname{sign}\left(x_3\right)=U_{-1}^{0}\left(\vec{x}\right)\operatorname{sign}\left(x_3\right). \tag{1.20}$$

Плоскость $x_3=0$ исключается из рассмотрения как в случае использования разложения (1.15), так и в случае применения леммы 1 к функциям (1.9).

Перейдем к доказательству соотношений для функций $w_{n,m}\left(\vec{x}\right)$. Для общности сразу рассмотрим случай $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$, а в доказательствах будем использовать разложение (1.15) как более общую форму записи. Если конечную сумму в разложении (1.12) приравнять ряду вида (1.15), то при $n=0,1,2,3,\dots$ и $|m|>n$ получим равенство $w_{n,m}\left(\vec{x}\right)\equiv 0\equiv U_n^m\left(\vec{x}\right)$.

Имеет место следующее утверждение:

Лемма 2. *Для функций* $w_{n,m}\left(\vec{x}\right)$ *при* $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$ *выполняются:*

а) *формулы дифференцирования*

$$\frac{\partial w_{n,m}}{\partial z_s}=nw_{n-1,m+s-2}\,,\quad s=1,2,3\,; \tag{1.21}$$

б) *рекуррентные соотношения*

$$w_{n+1,m}=z_1w_{n,m-1}+z_2w_{n,m}+z_3w_{n,m+1}\,, \tag{1.22}$$

$$mw_{n+1,m}=\left(n+1\right)\left(z_1w_{n,m-1}-z_3w_{n,m+1}\right). \tag{1.23}$$

Доказательство. Определение функций $w_{n,m}\left(\vec{x}\right)$ с помощью разложений вида (1.15) позволяет доказать все формулы по единой схеме: приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях τ в исходном ряде и ряде, полученном в результате тождественных преобразований.

а) Формулы (1.21) следуют из равенств

$$\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial w_{n,m}}{\partial z_s}\tau^m=\frac{\partial}{\partial z_s}\left(z_1\tau+z_2+z_3\tau^{-1}\right)^n=n\left(z_1\tau+z_2+z_3\tau^{-1}\right)^{n-1}\tau^{-s+2}=$$

$$=\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty}nw_{n-1,m}\tau^{m-s+2}=\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty}nw_{n-1,m+s-2}\tau^m\,.$$

б) Соотношение (1.22) следует из равенств

$$\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty}w_{n+1,m}\tau^m=\left(z_1\tau+z_2+z_3\tau^{-1}\right)^{n+1}=\left(z_1\tau+z_2+z_3\tau^{-1}\right)^n\left(z_1\tau+z_2+z_3\tau^{-1}\right)=$$

$$=\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty}z_1w_{n,m}\tau^{m+1}+\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty}z_2w_{n,m}\tau^m+\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty}z_3w_{n,m}\tau^{m-1}=$$

$$=\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty}\left(z_1w_{n,m-1}+z_2w_{n,m}+z_3w_{n,m+1}\right)\tau^m\,.$$

Соотношение (1.23) следует из равенств

$$\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty}mw_{n+1,m}\tau^m=\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\left(z_1\tau+z_2+z_3\tau^{-1}\right)^{n+1}=\left(n+1\right)\left(z_1\tau+z_2+z_3\tau^{-1}\right)^n\left(z_1\tau-z_3\tau^{-1}\right)=$$

$$=\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}-z_3\frac{\partial}{\partial z_3}\right)\left(z_1\tau+z_2+z_3\tau^{-1}\right)^{n+1}=\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty}\left(n+1\right)\left(z_1w_{n,m-1}-z_3w_{n,m+1}\right)\tau^m\,,$$

где последнее равенство получено с использованием формул (1.21).

Лемма доказана.

Следствие 1. Для $n = 0,1,2,3,\ldots$ и $|m| \le n$ $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ $w_{n,m}(\vec{x}) \equiv U_n^m(\vec{x})$.

Доказательство. Для $n = 0$ $w_{0,0}(\vec{x}) \equiv 1 \equiv U_0^0(\vec{x})$, $w_{0,m}(\vec{x}) \equiv 0 \equiv U_0^m(\vec{x})$ при $m \ne 0$. Для $n = 1,2,3,\ldots$ тождество $w_{n,m}(\vec{x}) \equiv U_n^m(\vec{x})$ следует из (1.6),(1.22).

Следствие 2. Для $n = -1,-2,-3,\ldots$ и $|m| \le -n-1$ при $x_3 \ne 0$ $w_{n,m}(\vec{x}) \equiv U_n^m(\vec{x})\operatorname{sign}(x_3)$.

Доказательство. Для $n = -1$ тождество $w_{n,m}(\vec{x}) \equiv U_n^m(\vec{x})\operatorname{sign}(x_3)$ совпадает с (1.20), для $n = -2,-3,\ldots$ оно следует из (1.5),(1.21).

2. Бикомплексная форма кватернионов. В работе [2] использовались векторно-скалярная и покоординатная формы записи кватернионов, что приводило к громоздким выражениям. Анализ полученных в [2] выражений указывает на целесообразность записи кватернионов в виде двух комплексных чисел (аналогично [9, с. 37]):

$$\mathbf{u} = u_0\mathbf{e}_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2\Diamond(u_1\mathbf{e}_3 + u_2) + (u_3\mathbf{e}_3 + u_0) = \mathbf{e}_2\Diamond u_p + u_s, \qquad (2.1)$$

где $u_p = u_1\mathbf{e}_3 + u_2 = u_1 i + u_2 = \operatorname{Pl}\mathbf{u}$, $u_s = u_3\mathbf{e}_3 + u_0 = u_3 i + u_0 = \operatorname{Ss}\mathbf{u}$.

Так как $\mathbf{e}_3^2 = -\mathbf{e}_0 = -1 = i^2$, то умножение кватернионов вида $\mathbf{c} = b\mathbf{e}_3 + a \in \mathbb{H}$ и комплексных чисел $c = bi + a \in \mathbb{C}$ производится по одним и тем же правилам. Поэтому будем считать $b\mathbf{e}_3 + a = bi + a$.

Комплексные числа u_p и u_s будем называть соответственно *плоской* (Plane) и *пространственно-скалярной* (Space-scalar) частями кватерниона, а функции Pl и Ss будем использовать для выделения указанных частей.

Рассмотрим произведение двух кватернионов:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}\Diamond\mathbf{v} = (\mathbf{e}_2\Diamond u_p + u_s)\Diamond(\mathbf{e}_2\Diamond v_p + v_s) = \mathbf{e}_2\Diamond u_p\Diamond\mathbf{e}_2\Diamond v_p + u_s\Diamond\mathbf{e}_2\Diamond v_p + \mathbf{e}_2\Diamond u_p\Diamond v_s + u_s\Diamond v_s =$$
$$= \mathbf{e}_2\Diamond(u_p v_s + \bar{u}_s v_p) + (u_s v_s - \bar{u}_p v_p) = \mathbf{e}_2\Diamond w_p + w_s.$$

В предпоследнем равенстве использовались тождества

$$\mathbf{e}_2^2 = -1,\ \mathbf{e}_2\Diamond\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3\Diamond\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{e}_2\Diamond c = \mathbf{e}_2\Diamond\mathbf{c} = \mathbf{e}_2\Diamond(b\mathbf{e}_3 + a) = (-b\mathbf{e}_3 + a)\Diamond\mathbf{e}_2 = \operatorname{conj}(\mathbf{c})\Diamond\mathbf{e}_2 = \bar{c}\Diamond\mathbf{e}_2.$$

Ниже используется более наглядная и компактная форма записи:

$$\mathbf{u} = \begin{Vmatrix} u_p \\ u_s \end{Vmatrix},\ \mathbf{u}\Diamond\mathbf{v} = \begin{Vmatrix} u_p \\ u_s \end{Vmatrix}\Diamond\begin{Vmatrix} v_p \\ v_s \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} u_p v_s + \bar{u}_s v_p \\ u_s v_s - \bar{u}_p v_p \end{Vmatrix},\ \vec{D}\Diamond\mathbf{v} = \begin{Vmatrix} 2i\frac{\partial}{\partial z_1} \\ 2i\frac{\partial}{\partial z_2} \end{Vmatrix}\Diamond\begin{Vmatrix} v_p \\ v_s \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2i\left(\frac{\partial v_s}{\partial z_1} - \frac{\partial v_p}{\partial z_2}\right) \\ 2i\left(\frac{\partial v_s}{\partial z_2} - \frac{\partial v_p}{\partial z_3}\right) \end{Vmatrix}. \qquad (2.2)$$

Внешне отличие от векторно-скалярной и покоординатной форм записи выражается в отсутствии горизонтальной разделительной черты (см. [2, формулы (0.9) и (3.6)]).

Используя формулы (2.2) и (1.5), получаем для $n = 0,1,\pm2,\pm3,\ldots$

$$\vec{D}\Diamond U_{n+1}^{k+1} = \begin{Vmatrix} 2i\frac{\partial}{\partial z_1} \\ 2i\frac{\partial}{\partial z_2} \end{Vmatrix}\Diamond\begin{Vmatrix} 0 \\ U_{n+1}^{k+1} \end{Vmatrix} = 2(n+1)\begin{Vmatrix} iU_n^k \\ iU_n^{k+1} \end{Vmatrix} = 2(n+1)\mathbf{v}_n^k(\vec{x}). \qquad (2.3)$$

$$\mathbf{e}_3\Diamond\bar{\mathbf{v}}_{-n-2}^k(\vec{\xi}) = \mathbf{e}_3\Diamond\operatorname{conj}\left(\mathbf{v}_{-n-2}^k(\vec{\xi})\right) = \begin{Vmatrix} 0 \\ i \end{Vmatrix}\Diamond\begin{Vmatrix} -i\bar{U}_{-n-2}^k \\ -i\bar{U}_{-n-2}^{k+1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -U_{-n-2}^k \\ \bar{U}_{-n-2}^{k+1} \end{Vmatrix} = \bar{\mathfrak{v}}_{-n-2}^k(\vec{\xi}). \qquad (2.4)$$

Функции $\mathbf{v}_n^k(\vec{x})$ и $\bar{\mathfrak{v}}_{-n-2}^k(\vec{\xi})$ построены в [2, формулы (3.4)–(3.8)] для $n = 0,1,2,3,\ldots$.

3. Ряд Лорана. Как показано в [1,2], если $\mathbf{u}(\vec{x})\in\mathscr{O}(V)$, то имеет место интегральная формула Коши (см. [2, формула (0.15)])

$$\mathbf{u}(\vec{x})=\iint_S \vec{\mathscr{M}}\left(\vec{\xi}-\vec{x}\right)\lozenge\,\vec{\mathrm{v}}\left(\vec{\xi}\right)\lozenge\,\mathbf{u}\left(\vec{\xi}\right)dS_\xi \text{ при } \vec{x}\in V,\ \vec{\mathscr{M}}\left(\vec{\xi}\right)=-\frac{1}{4\pi}\vec{\xi}\left|\vec{\xi}\right|^{-3},\ S=\partial V. \quad (3.1)$$

Как и в [2], для упрощения записи формул все разложения будем рассматривать для точки $\vec{a}=0$. Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 3. *Для ядра* $\vec{\mathscr{M}}\left(\vec{\xi}-\vec{x}\right)$ *имеют место разложения*

$$\vec{\mathscr{M}}\left(\vec{\xi}-\vec{x}\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathbf{v}_n^k(\vec{x})\lozenge\,\mathbf{e}_3\lozenge\,\overline{\mathbf{v}}_{-n-2}^{\,k}\left(\vec{\xi}\right) \text{ при } R_x<R_\xi, \quad (3.2)$$

$$\vec{\mathscr{M}}\left(\vec{\xi}-\vec{x}\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)\sum_{k=0}^{-n-2}(-1)^k\,\mathbf{v}_n^k(\vec{x})\lozenge\,\mathbf{e}_3\lozenge\,\overline{\mathbf{v}}_{-n-2}^{\,k}\left(\vec{\xi}\right) \text{ при } R_x>R_\xi. \quad (3.3)$$

Доказательство. Разложение (3.2) следует из [2, формула (3.8)] и тождества (2.4).

Меняя в (3.2) местами $\vec{x}$ и $\vec{\xi}$, а также делая замену $n=-l-2,\ l=-n-2=\ldots,-3,-2$, получим разложение

$$\vec{\mathscr{M}}\left(\vec{x}-\vec{\xi}\right)=-\frac{1}{\pi}\sum_{l=-\infty}^{-2}(l+1)\sum_{k=0}^{-l-2}(-1)^k\,\mathbf{v}_{-l-2}^k\left(\vec{\xi}\right)\lozenge\,\mathbf{e}_3\lozenge\,\overline{\mathbf{v}}_l^{\,k}(\vec{x}) \text{ при } R_\xi<R_x, \quad (3.4)$$

которое после использования тождеств

$$\vec{\mathscr{M}}\left(\vec{\xi}-\vec{x}\right)=-\vec{\mathscr{M}}\left(\vec{x}-\vec{\xi}\right)=\operatorname{conj}\left(\vec{\mathscr{M}}\left(\vec{x}-\vec{\xi}\right)\right),\ \operatorname{conj}(\mathbf{a}\lozenge\mathbf{b}\lozenge\mathbf{c})=\overline{\mathbf{c}}\lozenge\overline{\mathbf{b}}\lozenge\overline{\mathbf{a}} \text{ и } \overline{\mathbf{e}}_3=-\mathbf{e}_3 \quad (3.5)$$

и замены l на n преобразуется в разложение (3.3). Лемма доказана.

Лемма 4. *Если* $\overline{\mathbf{m}}(\vec{x})\in\mathscr{O}(V)$ *и* $\mathbf{u}(\vec{x})\in\mathscr{O}(V)$, *то*

$$\iint_S \mathbf{m}\left(\vec{\xi}\right)\lozenge\,\vec{\mathrm{v}}\left(\vec{\xi}\right)\lozenge\,\mathbf{u}\left(\vec{\xi}\right)dS_\xi=0,\quad S=\partial V, \quad (3.6)$$

$$\iint_{S_1}\mathbf{m}\left(\vec{\xi}\right)\lozenge\,\vec{\mathrm{v}}_1^{+}\left(\vec{\xi}\right)\lozenge\,\mathbf{u}\left(\vec{\xi}\right)dS_\xi=\iint_{S_2}\mathbf{m}\left(\vec{\xi}\right)\lozenge\,\vec{\mathrm{v}}_2^{-}\left(\vec{\xi}\right)\lozenge\,\mathbf{u}\left(\vec{\xi}\right)dS_\xi,\quad S_1\cup S_2=S, \quad (3.7)$$

где $\vec{\mathrm{v}}_1^{+}\left(\vec{\xi}\right)=\vec{\mathrm{v}}\left(\vec{\xi}\right)$ *– нормаль к* S_1 *в точке* $\vec{\xi}\in S_1$, *внешняя по отношению к* V,

$\vec{\mathrm{v}}_2^{-}\left(\vec{\xi}\right)=-\vec{\mathrm{v}}\left(\vec{\xi}\right)$ *– нормаль к* S_2 *в точке* $\vec{\xi}\in S_2$, *внутренняя по отношению к* V,

то есть величина интеграла не изменяется при деформации поверхности S_1 *в* S_2 *в области голоморфности векторов* $\overline{\mathbf{m}}(\vec{x})$ *и* $\mathbf{u}(\vec{x})$ *с сохранением направления нормали.*

Доказательство. Формула (3.6) легко получается из [2, формулы (1.3) и (1.9)], а формула (3.7) является простым следствием формулы (3.6). Лемма доказана.

Перейдем к основному утверждению.

Теорема 1. *Пусть* $V_{12}=\left\{\vec{\xi}:\rho_1>R_\xi>\rho_2\right\}$ *– сферический слой, ограниченный сферическими поверхностями* $\Omega_1=\left\{\vec{\xi}:R_\xi=\rho_1\right\}$ *и* $\Omega_2=\left\{\vec{\xi}:R_\xi=\rho_2\right\}$.

Если $\mathbf{u}(\vec{x})\in\mathscr{O}(V_{12})$, *то* $\forall\,\vec{x}\in V_{12}$ *имеет место разложение* (0.2), *где*

$$\mathbf{c}_n^k=\frac{n+1}{\pi}(-1)^k\,\mathbf{e}_3\lozenge\iint_{S_0}\overline{\mathbf{v}}_{-n-2}^{\,k}\left(\vec{\xi}\right)\lozenge\vec{\mathrm{v}}\left(\vec{\xi}\right)\lozenge\mathbf{u}\left(\vec{\xi}\right)dS_\xi. \quad (3.8)$$

Здесь S_0 *– кусочно-гладкая замкнутая поверхность, удовлетворяющая требованию:* $\mathbf{u}(\vec{x})$ *является вектором, голоморфным в области между* S_0 *и* Ω_j $(j=1,2)$, $\vec{\mathrm{v}}\left(\vec{\xi}\right)$ *– нормаль к* S_0, *внешняя по отношению к области, ограниченной поверхностью* S_0.

Доказательство. По формуле (3.1) при $V = V_{12}$ и $S = \Omega_1 \cup \Omega_2$ получаем

$$\mathbf{u}(\vec{x}) = \mathbf{u}_1(\vec{x}) - \mathbf{u}_2(\vec{x}) \quad \text{при} \quad \vec{x} \in V_{12}, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{u}_1(\vec{x}) = \iint_{\Omega_1} \mathscr{M}\left(\vec{\xi} - \vec{x}\right) \Diamond \vec{\mathrm{v}}_1^+\left(\vec{\xi}\right) \Diamond \mathbf{u}\left(\vec{\xi}\right) dS_{\xi}, \quad \mathbf{u}_2(\vec{x}) = \iint_{\Omega_2} \mathscr{M}\left(\vec{\xi} - \vec{x}\right) \Diamond \vec{\mathrm{v}}_2^-\left(\vec{\xi}\right) \Diamond \mathbf{u}\left(\vec{\xi}\right) dS_{\xi}.$$

Здесь $\vec{\mathrm{v}}_1^+\left(\vec{\xi}\right) = \vec{\mathrm{v}}\left(\vec{\xi}\right)$ – нормаль к Ω_1 в точке $\vec{\xi} \in \Omega_1$, *внешняя по отношению к* V_{12},

$\vec{\mathrm{v}}_2^-\left(\vec{\xi}\right) = -\vec{\mathrm{v}}\left(\vec{\xi}\right)$ – нормаль к Ω_2 в точке $\vec{\xi} \in \Omega_2$, *внутренняя по отношению к* V_{12}.

Ряды в (3.2) и (3.3) при фиксированном $\vec{x} \in V_{12}$ сходятся равномерно по $\vec{\xi} \in \Omega_1$ и $\vec{\xi} \in \Omega_2$ соответственно. Подставляя (3.2) в $\mathbf{u}_1(\vec{x})$, (3.3) в $\mathbf{u}_2(\vec{x})$ и выполняя почленное интегрирование рядов, получаем

$$\mathbf{u}_1(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{v}_n^k(\vec{x}) \Diamond \mathbf{c}_n^k, \quad \mathbf{c}_n^k = \frac{n+1}{\pi}(-1)^k \mathbf{e}_3 \Diamond \iint_{\Omega_1} \overline{\mathbf{v}}_{-n-2}^{\,k}\left(\vec{\xi}\right) \Diamond \vec{\mathrm{v}}_1^+\left(\vec{\xi}\right) \Diamond \mathbf{u}\left(\vec{\xi}\right) dS_{\xi},$$

$$\mathbf{u}_2(\vec{x}) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \sum_{k=0}^{-n-2} \mathbf{v}_n^k(\vec{x}) \Diamond \mathbf{c}_n^k, \quad \mathbf{c}_n^k = \frac{n+1}{\pi}(-1)^k \mathbf{e}_3 \Diamond \iint_{\Omega_2} \overline{\mathbf{v}}_{-n-2}^{\,k}\left(\vec{\xi}\right) \Diamond \vec{\mathrm{v}}_2^-\left(\vec{\xi}\right) \Diamond \mathbf{u}\left(\vec{\xi}\right) dS_{\xi}. \tag{3.10}$$

и равенство (3.9) переходит в разложение (0.2). По лемме 4 интегралы в (3.10) можно заменить интегралами по S_0 с заменой $\vec{\mathrm{v}}_j^{\pm}\left(\vec{\xi}\right) (j = 1, 2)$ на $\vec{\mathrm{v}}\left(\vec{\xi}\right)$.

Теорема доказана.

Заключение. Таким образом, для вектора $\mathbf{u}(\vec{x})$, голоморфного в сферическом слое, доказана возможность разложения в аналог ряда Лорана (0.2), где $\mathbf{v}_n^k(\vec{x})$ определяются формулой (2.3), а $\mathbf{c}_n^k$ – формулой (3.8).

Одним из направлений дальнейших исследований может быть построение теории вычетов.

1. **Gürlebeck K., Sprößig W.** Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems.– Berlin: Akademie-Verlag, 1989.– 253 p.
2. **Онищук О. В.** Разложение голоморфного вектора в степенной ряд // Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2001.– Т. 6, вип. 3. Фіз.-мат. науки.– С. 28–35.
3. **Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Дифференциальные уравнения математической физики.– М.: Физматгиз, 1962.– 768 с.
4. **Решение** пространственных задач теории упругости на основе новых соотношений для гармонических многочленов / Онищук О. В., Попов Г. Я., Толкачев А. В., Чумаченко К. И. // Прикл. механика. – 1999. – Т. 35, № 4. – С. 11–18.
5. **Онищук О. В., Чумаченко К. И.** Метод минимизации энергии погрешности для многосвязных областей // Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2000.– Т. 5, вип. 3. Фіз.-мат. науки.– С. 109–115.
6. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции: В 3 т.– М.: Наука, 1974.– Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.– 296 с.
7. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1987.– 688 с.
8. **Гобсон Е. В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций.– М.: ИЛ, 1952.– 476 с.
9. **Кантор И. Л., Солодовников А. С.** Гиперкомплексные числа.– М.: Наука, 1973.– 144 с.

Получено 28.03.2003 г.