

УДК 539.3

**В. М. Воробель, В. В. Реут**

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

## **ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ КОРОБЧАТОЙ КОНСТРУКЦИИ**

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару  
з математичних проблем механіки і математичної фізики ОНУ 26.03.2003 р.

Одержано розв'язок задачі про коливання тонкостінної конструкції квадратного профілю з періодичними граничними умовами на торцях. Знайдено перші власні частоти коливань. Побудовано контурні графіки прогинів конструкції.

Получено решение задачи о колебаниях тонкостенной конструкции квадратного профиля с периодическими граничными условиями на торцах. Найдены первые собственные частоты колебаний. Построены контурные графики прогибов конструкции.

The solution of the vibration problem of the thin-slab square-section structure with periodic boundary conditions at the end is obtained. The first natural frequencies are found. The contour graphs of the structure bending are constructed.

Тонкостенные конструкции прямоугольных профилей широко применяются в строительстве, кораблестроении, мостостроении и машиностроении при проектировании высотных зданий, туннелей, в качестве балок, отсеков судна и прочих элементов конструкций. Часто такие конструкции находятся под воздействием циклической нагрузки. Поэтому актуальной является задача нахождения резонансных частот и выбора параметров конструкции, при которых деформация конструкции будет наименьшей.

В работе [4] рассматривались колебания полубесконечной коробчатой конструкции, на торце которой граничные условия удовлетворяются в смысле Сен-Венана и были найдены два однородных решения; собственные частоты и конкретная нагрузка не рассматривались. В статье авторов [1] рассматривалась задача о колебаниях рамы (эту задачу можно рассматривать как плоскую деформацию коробчатой конструкции). Таким образом, остаются нерешенными вопросы о собственных частотах колебаний и об определении напряженно-деформированного состояния для коробчатых конструкций.

Ниже рассматривается бесконечно длинная пластинчатая конструкция, состоящая из пластин толщины  $h$ . Напряжения и деформации пластин состоят из изгиба и плоского напряженного состояния, причем влияние последнего не учитывается в дифференциальном уравнении изгиба. Конструкция имеет квадратное поперечное сечение. По средним линиям граней конструкции действуют сосредоточенные силы  $Pe^{-i\omega t}$ , расположенные на расстоянии  $2l$  друг от друга (рис. 1).

Так как нагрузка расположена периодически, можно рассматривать конечную часть конструкции длины  $2l$  с периодическими граничными условиями при  $y = \pm l$ .

Поскольку поперечное сечение квадратное и силы действуют по центру пластин, конструкция будет иметь четыре плоскости симметрии, которые изображены в поперечном сечении на рисунке 2. Поэтому математическую постановку задачи достаточно рассматривать в области  $0 \leq x \leq a, -l \leq y \leq l$ . В дальнейшем множитель  $e^{-i\omega t}$  у всех величин будем опускать.

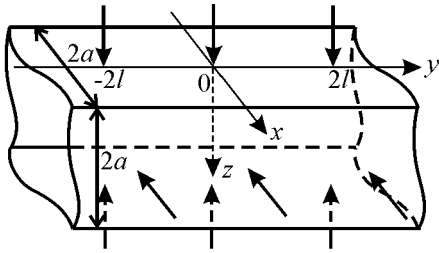


Рис. 1

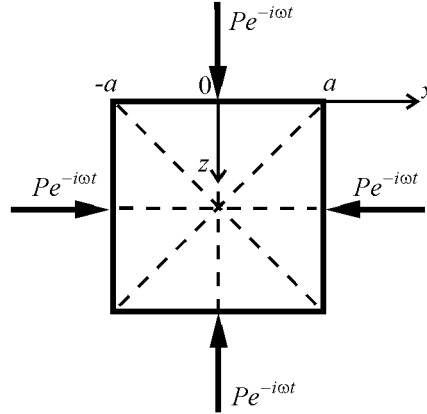


Рис. 2

С учетом вышесказанного, используя [3], краевую задачу, описывающую совместное плоско-изгибное напряженное состояние конструкции, можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} D\Delta^2 w - \rho h \omega^2 w = 0, \\ \Delta u + \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\rho}{G} \omega^2 u = 0, \quad (0 < x < a, |y| < l) \\ \Delta v + \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\rho}{G} \omega^2 v = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0,a} = 0, V_x \Big|_{x=0} = 0, V_x \Big|_{x=a} = -\frac{P}{2} \delta(y), \quad (2)$$

$$u \Big|_{x=0} = 0, \tau_{xy} \Big|_{x=0,a} = 0, \quad (3)$$

$$w \Big|_{x=a} = -u \Big|_{x=a}, V_x \Big|_{x=a} = h \sigma_x \Big|_{x=a}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^n w}{\partial y^n} \Big|_{y=-l} = \frac{\partial^n w}{\partial y^n} \Big|_{y=l}, \quad n = \overline{0,3}, \quad \frac{\partial^m u}{\partial y^m} \Big|_{y=-l} = \frac{\partial^m u}{\partial y^m} \Big|_{y=l}, \quad \frac{\partial^m v}{\partial y^m} \Big|_{y=-l} = \frac{\partial^m v}{\partial y^m} \Big|_{y=l}, \quad m = \overline{0,1}, \quad (5)$$

где

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \sigma_x = F \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \tau_{xy} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), V_x = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad (6)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, G = \frac{E}{2(1+\mu)}, F = \frac{E}{1-\mu^2},$$

$\rho$  – плотность материала,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль Юнга.

Применим к краевой задаче конечное преобразование Фурье по переменной  $y$  на промежутке  $[-l, l]$  с параметром  $\alpha = \pi m/l, m \in \mathbb{Z}$ . При этом  $u$  и  $v$  будем искать в виде (который следует из представления вектора в виде градиента и ротора):

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7)$$

Получим следующую одномерную краевую задачу:

$$\begin{cases} L_\alpha^2 w_\alpha(x) - \gamma^4 w_\alpha(x) = 0, \\ L_\alpha \varphi_\alpha(x) + \frac{\rho \omega^2}{F} \varphi_\alpha(x) = 0, \\ L_\alpha \psi_\alpha(x) + \frac{\rho \omega^2}{G} \psi_\alpha(x) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$w'_\alpha|_{x=0,a} = 0, w''_\alpha|_{x=0} = 0, w'''_\alpha|_{x=a} = \frac{P}{2D}, \quad (9)$$

$$\varphi'_\alpha|_{x=0} = 0, \psi_\alpha|_{x=0} = 0, 2i\alpha\varphi'_\alpha + (\alpha^2 + \chi_2^2)\psi_\alpha|_{x=a} = 0, \quad (10)$$

$$w_\alpha|_{x=a} + \varphi'_\alpha - i\alpha\psi_\alpha|_{x=a} = 0, \frac{D}{Fh} w''_\alpha|_{x=a} + (\chi_1^2 - \mu\alpha^2)\varphi_\alpha - i\alpha(1-\mu)\psi'_\alpha|_{x=a} = 0, \quad (11)$$

$$L_\alpha = \frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2, \gamma^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}, \chi_1 = \sqrt{\alpha^2 - k_1^2}, k_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{F}}, \chi_2 = \sqrt{\alpha^2 - k_2^2}, k_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}},$$

где величины с индексом  $\alpha$  означают трансформанты исходных величин.

Записывая общие решения дифференциальных уравнений в виде (с учетом первых двух граничных условий (10)):

$$w_\alpha(x) = C_1 \frac{\text{sh} \lambda_1 x}{\lambda_1} + C_2 \frac{\text{sh} \lambda_2 x}{\lambda_2} + C_3 \text{ch} \lambda_1 x + C_4 \text{ch} \lambda_2 x, \quad \lambda_n = \sqrt{\alpha^2 - (-1)^n \gamma^2}, \quad (12)$$

$$\varphi_\alpha(x) = C_5 \text{ch} \chi_1 x, \quad \psi_\alpha(x) = C_6 \frac{\text{sh} \chi_2 x}{\chi_2} \quad (13)$$

и подставляя их в граничные условия (10),(11), найдем

$$C_1 = \frac{Ph}{8\sqrt{3}k_1 D}, \quad C_2 = -C_1, \quad (14)$$

а для остальных констант получим систему линейных алгебраических уравнений в новых обозначениях  $C_n = -C_1 \tilde{C}_n$ ,  $n = 3, 4, 5$ ,  $C_6 = -iC_1 \tilde{C}_6$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \text{sh} \lambda_1 a & \lambda_2 \text{sh} \lambda_2 a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha\chi_1 \text{sh} \chi_1 a & (2\alpha^2 - k_2^2)\chi_2^{-1} \text{sh} \chi_2 a \\ \text{ch} \lambda_1 a & \text{ch} \lambda_2 a & \chi_1 \text{sh} \chi_1 a & \alpha\chi_2^{-1} \text{sh} \chi_2 a \\ \frac{h^2}{12} \lambda_1^3 \text{sh} \lambda_1 a & \frac{h^2}{12} \lambda_2^3 \text{sh} \lambda_2 a & ((1-\mu)\alpha^2 - k_1^2) \text{ch} \chi_1 a & \alpha(1-\mu) \text{ch} \chi_2 a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C}_3 \\ \tilde{C}_4 \\ \tilde{C}_5 \\ \tilde{C}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch} \lambda_1 a - \text{ch} \lambda_2 a \\ 0 \\ \lambda_1^{-1} \text{sh} \lambda_1 a - \lambda_2^{-1} \text{sh} \lambda_2 a \\ \frac{h^2}{12} (\lambda_1^2 \text{ch} \lambda_1 a - \lambda_2^2 \text{ch} \lambda_2 a) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

решая которую по правилу Крамера, найдем

$$\tilde{C}_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad n = \overline{3,6}, \quad \Delta = -M_1M_4 + M_2M_3, \quad (16)$$

$$M_1 = 2(1-\mu) \left( \alpha^2 \chi_1 \operatorname{sh} \chi_1 a \operatorname{ch} \chi_2 a - \left( \alpha^2 - \frac{1}{2} k_2^2 \right)^2 \operatorname{ch}(\chi_1 a) \chi_2^{-1} \operatorname{sh} \chi_2 a \right),$$

$$M_2 = k_2^2 \chi_1 \operatorname{sh}(\chi_1 a) \chi_2^{-1} \operatorname{sh} \chi_2 a, \quad M_3 = -\frac{k_1 h}{\sqrt{3}} \lambda_1 \lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_1 a \operatorname{sh} \lambda_2 a,$$

$$M_4 = \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 a \operatorname{ch} \lambda_2 a - \lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_2 a \operatorname{ch} \lambda_1 a,$$

$$\Delta_3 = -M_1 \left( \operatorname{ch} \lambda_1 a \operatorname{ch} \lambda_2 a - \lambda_1^{-1} \operatorname{sh}(\lambda_1 a) \lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_2 a - 1 \right) - M_2 \frac{h}{\sqrt{3}} k_1 \operatorname{ch}(\lambda_1 a) \lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_2 a,$$

$$\Delta_4 = -M_1 \left( \operatorname{ch} \lambda_1 a \operatorname{ch} \lambda_2 a - \lambda_2^{-1} \operatorname{sh}(\lambda_2 a) \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 a - 1 \right) + M_2 \frac{h}{\sqrt{3}} k_1 \operatorname{ch}(\lambda_2 a) \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 a,$$

$$\Delta_5 = \frac{h}{\sqrt{3}} k_1 \left( 2\alpha^2 - k_2^2 \right) \chi_2^{-1} \operatorname{sh} \chi_2 a \left( \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 a - \lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_2 a \right),$$

$$\Delta_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \alpha h k_1 \chi_1 \operatorname{sh} \chi_1 a \left( \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 a - \lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_2 a \right).$$

Равенство нулю определителя системы (15) дает уравнение для определения собственных частот колебаний. При этом следует исключить те частоты, которые удовлетворяют условиям  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = 0$  (как видно из системы, в этом случае в числителе дроби, определяющей неизвестные константы, также появляется нуль того же порядка). Условия  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = 0$  выполняются при следующих значениях безразмерных величин  $\tilde{\omega} = a\omega\sqrt{\rho/E}$  и  $\tilde{\alpha} = \alpha a$

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi}{1+\mu} \sqrt{p^2 - q^2}, \quad \tilde{\alpha} = \sqrt{2(1+\mu)\omega^2 - \pi^2 p^2}, \quad p > q \geq 0, \quad p, q \in \mathbb{Z}. \quad (17)$$

Дисперсионные кривые уравнения  $\Delta(\tilde{\omega}, \tilde{\alpha}) = 0$  построены на рисунке 3 (для отрицательных  $\tilde{\alpha}$  график следует симметрично отразить относительно оси  $\tilde{\omega}$ ). Отметим, что похожие кривые были построены в [2] для случая симметрично загруженной полосы.

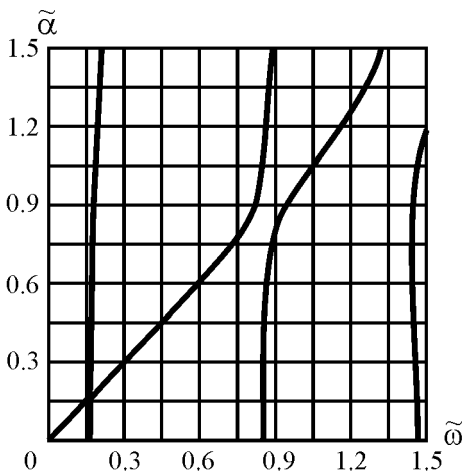


Рис. 3. Дисперсионные кривые

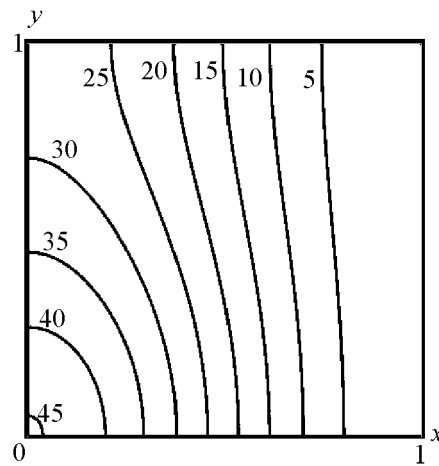
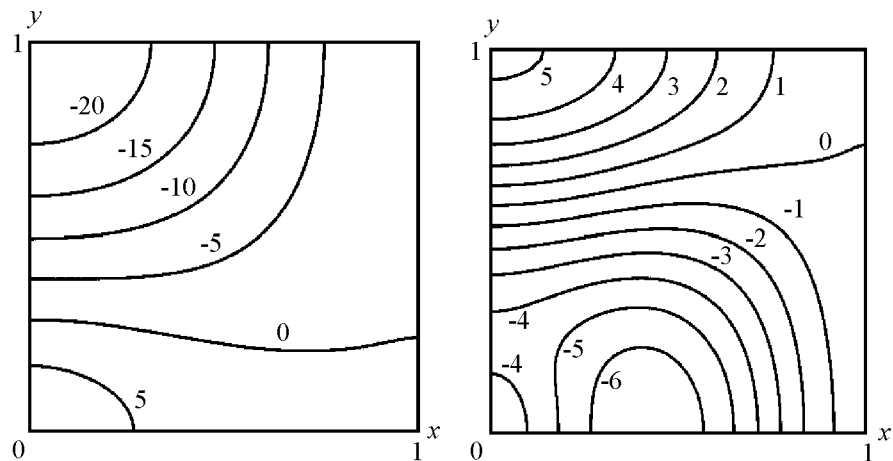
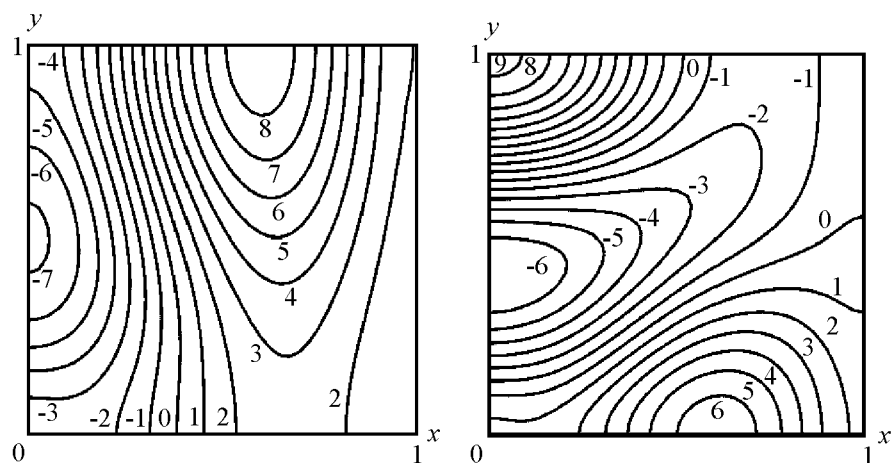


Рис. 4. Прогибы  $\tilde{w}$  при  $\tilde{\omega} = 0.1$

Рис. 5. Прогибы  $\tilde{w}$  при  $\tilde{\omega} = 0.3$  и  $\tilde{\omega} = 0.6$ Рис. 6. Прогибы  $\tilde{w}$  при  $\tilde{\omega} = 0.9$  и  $\tilde{\omega} = 1.2$ 

В таблице 1 даны значения собственных частот для дискретных  $\tilde{\alpha} = \alpha m/l$  при  $l/a = 1$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $\varepsilon = h/a = 0.1$ ,  $a = 1$ .

Таблица 1.

$m$	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\omega}$			
0	0	0.168	0.852	1.463	1.948
1	3.141	0.410	1.103	1.784	2.588
2	6.283	1.283	1.940	2.934	3.747
3	9.425	2.767	3.374	4.380	5.369
4	12.566	4.851	5.403	6.311	7.358

На рисунке 3 видно, что при  $\tilde{\alpha} \leq 0.168$  ( $l/a \geq 18.7$ ) первая собственная частота при  $m = 1$  меньше, чем первая собственная частота при  $m = 0$ .

Решение задачи можно записать, используя формулы обратного преобразования Фурье, в виде:

$$\begin{pmatrix} w(x, y) \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{2l} \begin{pmatrix} w_0(x) \\ \varphi_0(x) \end{pmatrix} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} w_{\alpha}(x) \\ \varphi_{\alpha}(x) \end{pmatrix} \cos \alpha y, \quad (18)$$

$$\psi(x, y) = \frac{-i}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{\alpha}(x) \sin \alpha y. \quad (19)$$

На рисунках (4)–(6) даны графики линий уровня безразмерных прогибов  $\tilde{w} = w Eh/P$  в области  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq l$  при  $l/a = 1$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $a = 1$ .

Анализируя полученные данные, можно сделать следующие выводы:

- 1) при частотах, достаточно близких к собственным, в сумме (18) основной вклад дает слагаемое, соответствующее этой частоте;
- 2) при увеличении частоты внешней силы и переходе через собственные частоты увеличивается количество экстремумов функции прогибов  $w(x, y)$  на единицу площади конструкции, причем они меняют свое расположение;
- 3) при  $\alpha = 0$  результаты совпадают с изложенными в [1], поскольку этот случай описывает поведение квадратной рамы.

Отметим, что в дальнейшем представляет интерес рассмотрение случая неперидической нагрузки.

1. **Воробель В. М., Реут В. В.** Установившиеся колебания квадратной рамы под действием сосредоточенных сил // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 2001. – Т. 6, вип. 3. Фіз.-мат. науки. – С. 100–107.
2. **Ворович И. И., Бабешко В. А.** Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
3. **Гришин В. А., Попов Г. Я., Реут В. В.** Расчёт коробчатых оболочек прямоугольного сечения // Прикл. математика и механика. – 1990. – Т. 54, вып. 4. – С. 605–612.
4. **Моссаковский В. И., Куликов Д. В.** Метод однородных решений для коробчатых оболочек при динамическом нагружении // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 1. – С. 24–27.

Получено 11.04.2003 г.