УДК 517.948

И. Н. Лисицына
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СДВИГОМ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
„Загальна теорія наближених методів" ОНУ 31.10.2002 р.

Обґрунтовується метод механічних квадратур наближеного розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші та із зсувом Карлемана на дійсній осі.

Обосновывается метод механических квадратур приближенного решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и сдвигом Карлемана на вещественной оси.

The ground of mechanical quadrature method for the approximate solution of singular integral equations with Koshi nuclear and Karleman shift on real axe is made.

1. Введение. Постановка задачи. Обозначим через $D^+ = \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\}$ верхнюю и $D^- = \{z \in C : \operatorname{Im} z < 0\}$ нижнюю полуплоскость комплексной плоскости C. Рассматривается сингулярное интегральное уравнение (СИУ) вида

$$a(x)\varphi(x) + b(x)\varphi(-x) + c(x)(S\varphi)(x) + d(x)(S\varphi)(-x) + (T\varphi)(x) = f(x), x \in R, \quad (1)$$

где

$$(S\varphi)(x) = (\pi i)^{-1} \int_R (t-x)^{-1} \varphi(t)\,dt, \quad (T\varphi)(x) = \int_R k(x,t)\varphi(t)\,dt, \quad (2)$$

известные функции $a(x), b(x), c(x), d(x), k(x,t) \in H_\alpha^{(r)}, r \geq 0, 0 < \alpha < 1$ по всем переменным, функция $f(x) \in \overset{0}{H}{}^{(r)}_{\alpha 1}, r \geq 0, 0 < \alpha < 1$. При этом функция $k(x,t)$ представима в виде

$$k(x,t) = (x+i)^{-\lambda} (t+i)^{-\nu} m(x,t), \quad (3)$$

где λ, ν – вещественные числа; $\nu > 0,5, \lambda \geq 1$.

СИУ (1) имеет *сдвиг* $\alpha(x) = -x$, удовлетворяющий условию Карлемана $\alpha[\alpha(x)] \equiv x, \alpha'(x) = -1 \neq 0$, имеющий две неподвижные точки $x = 0$ и $x = \infty$ и изменяющий ориентацию на вещественной оси.

Теория разрешимости СИУ (1) при самых широких предположениях относительно его коэффициентов, регулярного ядра и правой части построена в работе [**1**].

Отметим, что проекционные методы приближенного решения СИУ и их систем *с ядром Коши* на вещественной оси достаточно хорошо разработаны. Достаточно полную библиографию по этому вопросу можно найти в работах [**2**, **3**]. Что же касается разработки и обоснования квадратурных методов приближенного решения СИУ *вида* (1), то в этом направлении делаются лишь первые шаги.

Введя новые неизвестные функции $\varphi_1(x)=\varphi(x),\ \varphi_2(x)=\varphi(-x)$, СИУ (1) сведем к решению системы СИУ без сдвига, т. е. к системе СИУ

$$K\Phi = A(x)\Phi(x)+B(x)(S\Phi)(x)+(D\Phi)(x)=F(x),\ x\in R, \tag{4}$$

где вектор-функции (в. ф.) $\Phi(x)=\{\varphi_1(x);\varphi_2(-x)\}^T$, $F(x)=\{f(x);f(-x)\}^T$, знак „Т" здесь и ниже означает транспонирование;

$$(D\Phi)(x)=\int_R D(x,t)\Phi(t)\,dt, \tag{5}$$

а матрицы-функции (м. ф.) $A(x),\ B(x),\ D(x,t)$ имеют соответственно вид

$$A(x)=\begin{pmatrix} a(x) & b(-x)\\ b(x) & a(-x)\end{pmatrix},\quad B(x)=\begin{pmatrix} c(x) & d(-x)\\ d(x) & c(-x)\end{pmatrix},\quad D(x,t)=\begin{pmatrix} k(x,t) & 0\\ k(-x,t) & 0\end{pmatrix}.$$

При этом решения СИУ (1) выражаются через решения СИУ (4) по формуле $\varphi(x)=\varphi_1(x)$. Теория разрешимости систем СИУ вида (4) при самых широких предположениях относительно их коэффициентов, регулярных ядер и правых частей построена в работах [**4**, **6**]. Отметим, что в силу сделанных предположений м. ф. $A(x),\ B(x),\ D(x,t)\in H_\alpha^{(r)}$ по всем переменным, в. ф. $F(x)\in \overset{0}{H}{}^{(r)}_{\alpha 1}$, а м. ф. $D(x,t)$ представима в виде $D(x,t)=(x+i)^{-\lambda}(t+i)^{-\nu}m_1(x,t)$, где м. ф. $m_1(x,t)\in H_\alpha^{(r)}$ по всем переменным. Отметим, что принадлежность м. ф. и в. ф. какому-либо пространству понимаем поэлементно, а нормы м. ф. и в. ф. являются согласованными друг с другом. Тогда, согласно работам [**1**, **5**, **6**], решения СИУ (1), если они существуют, принадлежат, по крайней мере, пространству $\overset{0}{H}_{\alpha 1}$. Отметим также, что к настоящему времени обоснованы [**4**] *проекционные методы* приближенного решения СИУ (1) и систем СИУ (4). Что же касается обоснования *метода механических квадратур* приближенного решения СИУ (1) и систем СИУ (4), то до настоящего времени этот вопрос оставался открытым. Установление такого обоснования является ц е л ь ю статьи. Приближенные решения СИУ (1) будем строить на основе приближенного решения системы СИУ (4) методом механических квадратур в силу их эквивалентности.

2. Метод механических квадратур приближенного решения системы СИУ (4). Приближенные решения системы СИУ (4) ищем в виде интерполяционного многочлена ее точного решения, т. е. в виде

$$\Phi_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\Phi_k\omega_k(x),\ \omega_k(x)=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k,\ k=0,\pm1,\ldots. \tag{6}$$

При этом, согласно работе [7], справедливо представление

$$\Phi_n(x)=-\sum_{k=-n}^{n-1}\Gamma_k\psi_k(x),\ \psi_k(x)=\frac{2i}{x+i}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k,\ k=0,\pm1,\ldots \tag{7}$$

где $\Gamma_k=\Phi_n+\Phi_{n-1}+\cdots+\Phi_{k+1}$.

Так как $\Phi_k=\left\{\varphi_k^{(1)},\varphi_k^{(2)}\right\}^T$, $\Gamma_k=\left\{\gamma_k^{(1)},\gamma_k^{(2)}\right\}^T$, где $\gamma_k^{(j)}=\varphi_n^{(j)}+\varphi_{n-1}^{(j)}+\dots+\varphi_{k+1}^{(j)}$, то приближенные решения СИУ (1) можно записать в одном из видов

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\varphi_k^{(1)}\omega_k(x),\quad \varphi_n(x)=-\sum_{k=-n}^{n-1}\gamma_k^{(1)}\psi_k(x). \tag{8}$$

Тогда неизвестные векторы φ_n размерности 2 с постоянными компонентами определяются из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{n}\omega_k(x_j)\left[A(x_j)+B(x_j)\right]\varphi_k+\sum_{k=-n}^{-1}\omega_k(x_j)\left[A(x_j)-B(x_j)\right]\varphi_k-$$
$$-\sum_{k=-n}^{n-1}\sum_{s=k+1}^{n}\sum_{\mu=-n}^{n}\frac{a_{\mu k}(x_j)A_\mu}{(x_j+i)^\lambda}\varphi_s=F(x_j),\ j=\overline{-n,n}, \tag{9}$$

где, согласно работе [7],

$$a_{\mu k}(x_j)=\frac{1}{2n+1}\sum_{l=-n}^{n}M(x_j,t_l)\left(1-e^{\frac{2\pi i}{2n+1}}\right)e^{-\frac{2\pi i}{2n+1}l(\mu-k)},$$

а x_j и t_l – узлы коллокаций и квадратурной формулы [7] соответственно:

$$x_j=-\operatorname{ctg}\frac{\pi j}{2n+1},\ j=\overline{-n,n};\ t_l=-\operatorname{ctg}\frac{\pi l}{2n+1},\ l=\overline{-n,n}; \tag{10}$$

A_μ – коэффициенты квадратурной формулы

$$A_\mu=\begin{cases}0,\ \mu\ge 0,\\ \pi(2i)^{2-\lambda},\ \mu=-1,\\ \dfrac{\pi}{(2i)^{\lambda-2}}\dfrac{(-1)^{-\mu-1}}{(-\mu-1)!}(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)\cdots(\lambda-2),\ -(p-1)\le\mu\le 2,\\ 0,\ \mu\le -p,\end{cases}$$

где p – целое неотрицательное число, такое, что $\lambda=p-\beta,\ 0\le\beta<1$, а м. ф. $M(x,t)$ в соответствии с определением м. ф. $D(x,t)$ и представлением (3) имеет вид

$$M(x,t)=\frac{1}{(t+i)^\nu}\begin{pmatrix}m(x,t) & 0\\ (x+i)^\lambda(-x+i)^{-\lambda}m(-x,t) & 0\end{pmatrix}.$$

Обозначим через $X(Y)$ пространство решений (правых частей) системы СИУ (4). В качестве пространства X возьмем пространство в. ф. $\eta(x)\in C$ размерности 2, для которых справедливы формулы Сохоцкого $\eta(x)=\eta^+(x)+\eta^-(x)$, где $\eta^\pm(\infty)=0,\ \eta^\pm(x)\in C$. Здесь $\eta^\pm(x)$ – функции, аналитически продолжимые соответственно в область $D^\pm$. При этом норму в пространстве X введем следующим образом $\|\eta(x)\|_X=\|\eta^+(x)\|_C+\|\eta^-(x)\|_C$. Согласно работе [10], пространство X является банаховым и $\|S\|_{X\to Y}=1$, где S – сингулярный оператор Коши (2). Тогда Y – пространство в. ф. размерности 2 с непрерывными компонентами, т. е. $Y=C$.

Обозначим через L_n оператор, который каждой в. ф. $F(x) \in Y$ ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен Лагранжа по узлам x_j (10), т. е.

$$\left(L_n F\right)(x) = \sum_{r=-n}^{n} a_k \omega_k(x), \quad a_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} F\left(x_j\right) e^{-\frac{2\pi i}{2n+1} j}.$$

Через $X_n = Y_n$ обозначим множество агрегатов вида (6). Тогда $X_n \subset X_{n+1} \subset X$, $Y_n \subset Y_{n+1} \subset Y$, $\dim X_n = \dim Y_n = 2n+1$, а оператор $L_n : Y \to Y_n$ и, согласно работе [8], обладает свойствами $L_n^2 = L_n, \left\|L_n\right\|_{Y \to Y} \leq d_1 \ln n$, где здесь и ниже d_i – вполне определенные постоянные, не зависящие от n. Тогда на основании работы [9] систему уравнений (9) можно записать в виде

$$K_n \Phi_n = \left\{L_n\left[(A+B)\Phi_n^+ - (A-B)\Phi_n^-\right] + \left(L_n \mathrm{X}^- [A+B]^{-1}\left(L_n^t D\Phi_n\right)(x)\right)(x)\right\} = \left(L_n F\right)(x),$$

где K_n – приближенный оператор, а L_n и L_n^t – интерполяционные многочлены Лагранжа порядков n соответственно по переменным x и t по узлам интерполяции (10) x_j и t_l соответственно.

Теорема 1. *Пусть функции* $a(x), b(x), c(x), d(x), k(x,t) \in H_\alpha^{(r)}, r \geq 0, 0 < \alpha < 1$; *функция* $k(x,t)$ *представима в виде* (3), *где функция* $m(x,t) \in H_\alpha^{(r)}, r \geq 0,\ 0 < \alpha < 1$ *по обеим переменным;* $\det\left[A(x)+B(x)\right] \neq 0, \det\left[A(x)-B(x)\right] \neq 0$ *на* R *и частные индексы м. ф.* $A(x)+B(x)$ *и* $A(x)-B(x)$ *совпадают.*

Если функция $f(x) \in \overset{0}{H}{}_{\alpha 1}^{(r)}, r \geq 0,\ 0 < \alpha < 1$ *и уравнение* (1) *имеет единственное решение, то система уравнений (9) однозначно разрешима при достаточно больших* n, *а приближенные решения* $\varphi_n(x)$ *уравнения* (1) *сходятся в пространстве* C *к его точному решению* $\varphi(x)$ *со скоростью*

$$\left\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\right\|_C = O\left(n^{-r-\alpha} \ln n\right). \tag{11}$$

Доказательство. В условиях теоремы определенный формулой (4) оператор $K : X \to Y$ непрерывно обратим. Так как $\det\left[A(x)+B(x)\right] \neq 0, \det\left[A(x)-B(x)\right] \neq 0$ на R и частные индексы м. ф. $A(x)+B(x)$ и $A(x)-B(x)$ совпадают, то согласно работе [6] справедлива факторизация

$$\left[A(x)+B(x)\right]^{-1}\left[A(x)-B(x)\right] = \left[\mathrm{X}^-(x)\right]^{-1} \mathrm{X}^+(x), \tag{12}$$

где $\det \mathrm{X}^\pm(x) \neq 0$ на R; м. ф. $\mathrm{X}^\pm(x)$ аналитически продолжимы соответственно в области $D^\pm$, $\mathrm{X}^\pm(z) \neq 0 \quad z \in D^\pm$; $\mathrm{X}^\pm(x) \in H_\alpha^{(r)}$. Тогда на основании формул Сохоцкого и факторизации (12) оператор K можно представить в виде

$$K\Phi = \mathrm{X}^-(x)\Phi^+(x) - \mathrm{X}^+(x)\Phi^-(x) + \mathrm{X}^-(x)\left[A(x)+B(x)\right]^{-1}(D\Phi)(x) : X \to Y. \tag{13}$$

Пусть м. ф. $\mathrm{X}_n^+(x)$ и $\mathrm{X}_n^-(x)$ – интерполяционные многочлены Лагранжа соответственно м. ф. $\mathrm{X}^+(x)$ и $\mathrm{X}^-(x)$. Согласно работе [10] они имеют вид

$$X_n^+(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k^+\omega_k(x), \quad X_n^-(x)=\sum_{k=-n}^{0} c_k^-\omega_k(x). \tag{14}$$

Так как м. ф. $X^{\pm}(x)\in H_\alpha^{(r)}$, то, согласно работе [8], справедливы оценки

$$\left\|X^{\pm}(x)-X_n^{\pm}(x)\right\|_C \le d_2 n^{-r-\alpha}\ln n. \tag{15}$$

Введем оператор

$$K_1\Phi = X_n^-(x)\Phi^+(x)-X_n^+(x)\Phi^-(x)+X_n^-(x)\left[A(x)+B(x)\right]^{-1}(D\Phi)(x): X\to Y. \tag{16}$$

На основании представлений (13), (16) и оценок (15) следует оценка

$$\left\|K-K_1\right\|_{X\to Y}\le d_3 n^{-r-\alpha}\ln n, \tag{17}$$

из которой следует, что при достаточно больших n существует ограниченный оператор $K_1^{-1}: Y\to X$. Рассмотрим оператор

$$K_2\Phi = X_n^-(x)\Phi^+(x)-X_n^+(x)\Phi^-(x)+\left(L_n X_n^-\left[A+B\right]^{-1}(D\Phi)\right)(x): X\to Y. \tag{18}$$

На основании представлений (16), (18) и результатов работы [8] следует оценка

$$\left\|K_1-K_2\right\|_{X\to Y}\le d_4 n^{-r-\alpha}\ln n, \tag{19}$$

из которой следует существование при достаточно больших n ограниченного оператора $K_2^{-1}: Y\to X$. Наконец, введем оператор

$$K_3\Phi = X_n^-(x)\Phi^+(x)-X_n^+(x)\Phi^-(x)+\left(L_n X_n^-\left[A+B\right]^{-1}\left(L_n' D\Phi\right)\right)(x): X\to Y. \tag{20}$$

Из представлений (18), (20), согласно работе [7], следует оценка

$$\left\|K_2-K_3\right\|_{X\to Y}\le d_5 n^{-r-\alpha}, \tag{21}$$

из которой следует, что при достаточно больших n существует ограниченный оператор $K_3^{-1}: Y\to X$. Легко проверить, что оператор $K_3: X_n\to Y_n$. Из этого следует, что при достаточно больших n существует ограниченный оператор $K_3^{-1}: Y_n\to X_n$. Также легко проверить, что на пространстве X_n операторы K_3 и K_n совпадают. Из этого следует, что при достаточно больших n существует ограниченный оператор $K_n^{-1}: Y_n\to X_n$. А это означает, что система уравнений (9) однозначно разрешима при достаточно больших n. Так как функция $f(x)\in \overset{0}{H}{}^{(r)}_{\alpha 1}$, то, согласно работе [8], справедлива оценка

$$\left\|F(X)-(L_n F)(x)\right\|_C \le d_6 n^{-r-\alpha}\ln n. \tag{22}$$

Теперь на основании теоремы 7 работы [9, стр. 19] из оценок (17), (19), (21), (22) следует оценка (11).

Рассмотрим теперь и с к л ю ч и т е л ь н ы й с л у ч а й СИУ (1). В этом случае полагаем, что $\det\left[A(x)+B(x)\right]$ и $\det\left[A(x)-B(x)\right]$ имеют нули в точках $\alpha_0=\infty,\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ и $\beta_0=\infty,\beta_1,\ldots,\beta_q$ вещественной оси R соответственно порядков $\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_p$ и $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_q$. Тогда на основании работы [5] справедливы представления

$$A(x)+B(x)=M(x)D_-(x)R_-(x), \quad A(x)-B(x)=N(x)D_+(x)R_+(x), \tag{23}$$

где $\det M(x)\neq 0, \det N(x)\neq 0$ на R, $R_{\pm}(x)$ – полиномиальные соответственно по степеням $(x+i)^{-1}$ м. ф. с постоянными и отличными от нуля определителями, а м. ф. $D_{-}(x)$ и $D_{+}(x)$ имеют соответственно вид

$$D_{-}(x)=\operatorname{diag}\left\{(x-i)^{\nu_0^{(1)}}\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{x-\alpha_k}{x-i}\right)^{\nu_k^{(1)}},(x-i)^{\nu_0^{(2)}}\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{x-\alpha_k}{x-i}\right)^{\nu_k^{(2)}}\right\},$$

$$D_{+}(x)=\operatorname{diag}\left\{(x+i)^{\mu_0^{(1)}}\prod_{k=1}^{q}\left(\frac{x-\beta_k}{x+i}\right)^{\mu_k^{(1)}},(x+i)^{\mu_0^{(r)}}\prod_{k=1}^{q}\left(\frac{x-\beta_k}{x+i}\right)^{\mu_k^{(r)}}\right\},$$

где $\nu_j^{(1)}+\nu_j^{(2)}=\nu_j,\ j=\overline{0,p};\quad \mu_j^{(1)}+\mu_j^{(2)}=\mu_j,\ j=\overline{0,q}$. Обозначим

$$r_0=\max\left\{\nu_0^{(1)},\nu_1^{(1)},\ldots,\nu_p^{(1)},\nu_0^{(2)},\nu_1^{(2)},\ldots,\nu_p^{(2)};\mu_0^{(1)},\ldots,\mu_q^{(2)}\right\}, \tag{24}$$

$$\sum_{j=0}^{p}\nu_j=\nu,\quad \sum_{j=0}^{q}\mu_j=\mu. \tag{25}$$

Теорема 2. *Пусть функции* $a(x),b(x),c(x),d(x)\in H_{\alpha}^{(r)},\ r\geq r_0, 0<\alpha<1$, *где число* r_0 *определено соотношением* (24)*; справедливы представления* (23)*, где* $\det M(x)\neq 0, \det N(x)\neq 0$ *на* R *и частные индексы м. ф.* $M(x)$ *и* $N(x)$ *совпадают; функция* $k(x,t)$ *представима в виде* (3)*, где функция* $m(x,t)\in H_{\alpha}^{(r)},\ r\geq 0,\ 0<\alpha<1$ *по обеим переменным.*

Если функция $f(x)\in \overset{0}{H}{}_{\alpha 1}^{(r)},\ r\geq r_0, 0<\alpha<1$ *и уравнение* (1) *безусловно разрешимо и имеет единственное решение, то система уравнений* (9) *однозначно разрешима при достаточно больших* n, *а приближенные решения* $\varphi_n(x)$ *уравнения* (1) *сходятся в пространстве* C *к его точному решению* $\varphi(x)$ *со скоростью* (11).

Доказательство. Согласно работе [5] в условиях теоремы определенный формулой (4) оператор $K:X\to Y$ непрерывно обратим. Так как $\det M(x)\neq 0, \det N(x)\neq 0$ на R и частные индексы м. ф. $M(x)$ и $N(x)$ совпадают, то справедлива факторизация $M^{-1}(x)N(x)=\left[X^{-}(x)\right]^{-1}X^{+}(x)$, где $\det X^{\pm}(x)\neq 0$ на R; м. ф. $X^{\pm}(x)\in H_{\alpha}^{(r)}$; м. ф. $X^{\pm}(x)$; аналитически продолжима соответственно в область $D^{\pm}$. Тогда оператор K можно записать в виде

$$K\Phi=X^{-}(x)D_{-}(x)R_{-}(x)\Phi^{+}(x)-X^{+}(x)D_{+}(x)R_{+}(x)\Phi^{-}(x)+$$
$$+X^{-}(x)M^{-1}(x)(D\Phi)(x):X\to Y. \tag{26}$$

Пусть $X_n^{+}(x)$ и $X_n^{-}(x)$ – интерполяционные многочлены Лагранжа м. ф. $X^{+}(x)$ и $X^{-}(x)$ соответственно порядков $n-\mu$ и $n-\nu$, где числа μ и ν определяются по формулам (25). Согласно работе [10] м. ф. $X^{+}(x)$ и $X^{-}(x)$ имеют соответственно вид

$$X_n^+(x)=\sum_{k=0}^{n-\mu} c_k^+\omega_k(x),\quad X_n^-(x)=\sum_{k=-n+\nu}^{0} c_k^-\omega_k(x).$$

При этом на основании работы [8] справедливы оценки (15). Введем вспомогательный оператор

$$K\Phi=X_n^-(x)D_-(x)R_-(x)\Phi^+(x)-X_n^+(x)D_+(x)R_+(x)\Phi^-(x)+$$
$$+X^-(x)M^{-1}(x)(D\Phi)(x):X\to Y. \tag{27}$$

Теперь на основании представлений (26), (27) и оценок (15) следует оценка (17), из которой следует, что при достаточно больших n существует ограниченный оператор $K_1^{-1}:Y\to X$. Дальнейшее доказательство теоремы 2 проводится по схеме доказательства теоремы 1.

В заключение отметим, что квадратурные методы приближенного решения различных классов интегральных уравнений, в том числе различных видов СИУ и их систем, на практике являются более эффективными по сравнению с проекционными методами их приближенного решения. Эффективность разработанного и обоснованного выше квадратурного метода приближенного решения СИУ вида (1) подтверждается строгими доказательствами и простыми квадратурными формулами, удобными при численной реализации метода. Заслуживает внимания применение разработанного метода к приближенному решению систем СИУ вида (1), СИУ и их систем с ядром Коши и с комплексно сопряженными значениями неизвестных функций.

1. **Литвинчук Г. С.** Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.– М.: Наука, 1977.– 448 с.
2. **Сааделдин Ал Тунджи.** Приближенное решение нормального случая сингулярных интегральных уравнений на вещественной оси: Дис… канд. физ.-мат. наук: 01.01.02.– Одесса, 1995.– 121 с.
3. **Свяжина Н. Н.** Приближенное решение исключительного случая сингулярных интегральных уравнений на вещественной оси: Дис… канд. физ.-мат. наук: 01.01.02.– Одесса, 1995.– 126 с.
4. **Тихоненко Н. Я., Свяжина Н. Н.** Проекционные методы решения сингулярных интегральных уравнений на вещественной оси // Крайові задачі для диференціальних рівнянь.– 2000.– Вип. 5.– С. 245–249.
5. **Пресдорф З.** Некоторые классы сингулярных уравнений.– М.: Мир, 1979.– 493 с.
6. **Векуа Н. П.** Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.– М.: Наука, 1970.– 379 с.
7. **Лісіцина І. М. Тихоненко М. Я.** Поліноміальні квадратурні формули обчислення регулярних інтегралів на дійсній осі // Вісн. Львівськ. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформатики.– 2002.– Вип. 5.– С. 14–18.
8. **Тихоненко Н. Я., Лисицына И. Н.** Интерполяция функций на вещественной оси и приложения // Вісн. Київськ. ун-ту. Серія фіз.-мат. наук.– 1998.– Вип. 2.– С. 77–86.
9. **Габдулхаев Б. Г.** Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.– Казань: КГУ, 1980.– 232 с.
10. **Іванов В. В.** Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.– К.: Наук. думка, 1968.– 252 с.

Получено 22.11.2002 г.