Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 55–61

УДК 511.33

Г. С. Белозеров, П. Д. Варбанец
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМОЙ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
"Аналітична теорія чисел" ОНУ 13.09.2002 р.

Доведено, що остатній член $R(a,b,k;N)$ асимптотичної формули для кількості розв'язків $A(a,b,k;N)$ диофантового рівняння $a(x_1^2+x_2^2)-b(x_3^2+x_4^2)=k$ при умові, що $x_1^2+x_2^2\le N$, $N\to\infty$, задовольняє нерівності $\frac{1}{X}\int\limits_0^X R^2(a,b,k;x)dx << X^{(4/3)+\varepsilon}ab^{-5/3}$.

Доказано, что остаточный член $R(a,b,k;N)$ асимптотической формулы для числа решений $A(a,b,k;N)$ диофантова уравнения $a(x_1^2+x_2^2)-b(x_3^2+x_4^2)=k$ при условии, что $x_1^2+x_2^2\le N$, $N\to\infty$, удовлетворяет неравенству $\frac{1}{X}\int\limits_0^X R^2(a,b,k;x)dx << X^{(4/3)+\varepsilon}ab^{-5/3}$.

It is shown that the error term $R(a,b,k;N)$ of the asymptotic formula for the number of solutions $A(a,b,k;N)$ of the diophantine equation $a(x_1^2+x_2^2)-b(x_3^2+x_4^2)=k$ for the condition $x_1^2+x_2^2\le N$, $N\to\infty$ satisfy on the inequality $\frac{1}{X}\int\limits_0^X R^2(a,b,k;x)dx << X^{(4/3)+\varepsilon}ab^{-5/3}$.

Введение. Задачи о представлении натуральных чисел квадратичной формой $f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{Z}[x_1,\dots,x_n]$ еще в XVIII в. рассматривали Эйлер, Лагранж, Лежандр, а позднее и Гаусс. Но только с привлечением аналитических средств удалось построить асимптотические формулы для количества таких представлений. В работах Ingham [1], Estermann [2], Исмоилова [3], Heath-Brown [4], Deshouillers-Iwaniec [5] рассматривалось диофантово уравнение

$$xy-uv=1 \tag{1}$$

под условием $xy\le N$.

Эта задача эквивалентна задаче об оценке суммы

$$\sum_{n\le N}\tau(n)\tau(n+1), \tag{2}$$

где $\tau(n)$ – число натуральных делителей n.

Motohashi [6] доказал асимптотическую формулу

$$\sum_{n\le X}\tau(n)\tau(n+h)=X\sum_{i=0}^{2}(\log x)^i\sum_{j=0}^{2}c_{ij}\sum_{d|h}(\log d)^i/d+O(x^{(2/3)+\varepsilon}), \tag{3}$$

равномерную для $1\le h\le x^{26/27}$ (здесь c_{ij} – вычислимые константы, а $\varepsilon>0$ – произвольно малое; постоянная в символе "O" зависит только от ε).

В 1981 г. Chalk [7] изучал распределение решений диофантова уравнения

$$a(x^2+y^2)-b(u^2+v^2)=k\ ,\ \ x^2+y^2\le N\ ;\ \ a,b\in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Число решений $A(a,b,k;N)$ уравнения (4) определяется следующей суммой

$$A(a,b,k;N)=\sum_{k/a<n\le N,\, an\equiv k(\operatorname{mod} b)} r(n)r((an-k)/b)\ ,\ \text{ где }\ r(n)=\sum_{n=n_1^2+n_2^2} 1\ .$$

В 1991 г. Белозеров [8] показал, что при условиях

$$(a,k)=(b,k)=(a,k)=(2,b)=(2,k)=1\ \text{ и }\ a>b\ ,\ \ k=o(aN)\ ,\ \ (ab)^{3+\varepsilon}<<N$$

справедлива асимптотическая формула при $N\to\infty$

$$A(a,b,k;N)=E(a,b,k)\cdot(N-k/a)+R(a,b,k;N)\ , \tag{5}$$

где $R(a,b,k;N)=O(N^{(5/6)+\varepsilon}(a/b)^{1/2}$.

Заметим, что Bantle [9] в специальном случае

$$\sum_{n\le N} r(n)r(n+1)$$

получил остаточный член $O(N^{(2/3)+\varepsilon})$.

К сожалению, методы спектральной теории автоморфных форм, которые использовались в работах [5], [6], [9], на общий случай (задача (4)) нам перенести не удалось.

Целью настоящей статьи является изучение среднего квадрата остаточного члена в асимптотической формуле (5):

$$\int_{k/a}^{X}\left[A(a,b,k;x)-E(a,b,k)\cdot(x-k/a)\right]^2 dx\ . \tag{6}$$

Полученный ниже результат позволяет утверждать, что для почти всех $N\le X$ остаточный член в (5) есть

$$O(N^{(2/3)+\varepsilon}(a^{1/2}/b^{5/6})^{1+\varepsilon})\ .$$

1. Вспомогательные утверждения. Пусть $\rho(a,l,q)$ обозначает число решений сравнения $a(x^2+y^2)\equiv l(\operatorname{mod} q)$.

Лемма 1. *Пусть* $(a,q)=1$. *Тогда*

$$\rho(a,l,q)=E_1(l,q)\cdot q\prod_{p^\alpha\| q}(1-\chi_4(p^{\gamma+1})/p)\cdot(1-\chi_4(p^{\alpha-\gamma})+(1-1/p)\sum_{\beta=\alpha-\gamma}^{\alpha-1}\chi_4(p^{\alpha-\beta}))\ ,$$

где χ_4 *– неглавный характер* $\operatorname{mod} 4$,

$$E_1(l,q)=\begin{cases} 1, & \textit{если } (q,2)=1,\\ 1, & \textit{если } q\equiv 2(\operatorname{mod} 4),\\ 1, & \textit{если } q\equiv 0(\operatorname{mod} 4),\ \gamma_0>\alpha-2,\\ 2, & \textit{если } q\equiv 0(\operatorname{mod} 4),\ \gamma_0\le\alpha-2,\ l\cdot 2^{-\gamma_0}\equiv a(\operatorname{mod} 4),\\ 0, & \textit{если } q\equiv 0(\operatorname{mod} 4),\ \gamma_0\le\alpha-2,\ l\cdot 2^{-\gamma_0}\equiv a+2(\operatorname{mod} 4),\end{cases}$$

и $p^\gamma=(l,p^\alpha)$ $(p$ *– простое нечетное*$)$, $2^{\gamma_0}=(l,2^\alpha)$, $2^\alpha\parallel q$.

Следствие. *Если* $(l,q)=1$, *то*

$$\rho(a,l,q)=E_1(l,q)\cdot q\prod_{p^\alpha\|q}(1-\chi_4(p)/p).$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из мультипликативности $\rho(a,l,q)$ по q и из представления

$$\rho(a,l,p^\alpha)=\sum_{x,y=0}^{p^\alpha-1}(1/p^\alpha)\sum_{t=0}^{p^\alpha-1}\exp(2\pi i(a(x^2+y^2)-l)t/p^\alpha),$$

с последующим вычислением возникающих сумм Гаусса (подробнее см. [8]).

Лемма 2. *Равномерно по* $q<<x^{1-\varepsilon}$

$$B(a,l,q;x)=\sum_{\substack{n\le x\\ an\equiv l(q)}}r(n)=\pi xq^{-2}\rho(a,l,q)+x^{1/2}q^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\Omega(n,l,q)\cdot n^{-1/2}J_1(2\pi q^{-1}(nx)^{1/2})+$$
$$+O(x^\varepsilon). \qquad (7)$$

Здесь $\Omega(n,l,q)=\sum_{\substack{n_1,n_2\in Z\\ n_1^2+n_2^2=n}}\ \sum_{\substack{l_1,l_2(q)\\ a(l_1^2+l_2^2)\equiv l(q)}}\exp(2\pi i(n_1l_1+n_2l_2)/q)$,

$J_1(z)$ – *функция Бесселя первого рода индекса* 1.

Кроме того, для $M>>x/q^2$

$$B(a,l,q;x)=\pi xq^{-2}\rho(a,l,q)+x^{1/2}q^{-1}\sum_{n\le M}\frac{\Omega(n,l,q)}{n^{1/2}}\cdot J_1(2\pi q^{-1}(nx)^{1/2})+O(x^\varepsilon)+$$
$$+O(x^{(1/2)+\varepsilon}\cdot M^{-1/2}). \qquad (8)$$

Доказательство. Это утверждение можно получить аналогично доказательству леммы 5 из [10].

Лемма 3. *Пусть* $a,b,k\in\mathbf{N}$, *причем* $b\equiv k\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$ и $(a,b)=(b,k)=(a,k)=1$, $a>b$. *Тогда для* $M\ge N^{1/2}$

$$A(a,b,k;N)=E(a,b,k)(N-k/a)+S_1(N)-S_2(N)+S_3(N)+$$
$$+O((a/b)^{1/2}\tau(b)N^{1+\varepsilon}M^{-1/2})+O(N^{1/2}(k/a)^\varepsilon)+O(ka^{-1}b^{-1}\log N_1),$$

где

$$S_1(N)=N^{1/2}b^{-1}\sum_{n\le M}n^{-1/2}\sum_{\substack{d\le N_1^{1/2}\\ (d,a)=1}}\frac{\Omega(n,k,bd)}{d}\chi_4(d)J_1(2\pi b^{-1}d^{-1}(nN)^{1/2}),$$

$$S_2(N)=N^{1/2}(4b)^{-1}\sum_{n\le M}n^{-1/2}\sum_{\substack{t\le N_1^{1/2}\\ (t,a)=1}}\frac{\Omega(n,k+bt,4bt)-\Omega(n,k-bt,4bt)}{t}J_1(2\pi(nN_2)^{1/2}(4bt)$$

$$S_3(N)=N_1^{1/4}(4(ab)^{1/2})^{-1}\sum_{n\le M}n^{-1/2}\sum_{\substack{t\le N_1^{1/2}\\ (t,a)=1}}\frac{\Omega(n,k+bt,4bt)-\Omega(n,k-bt,4bt)}{t^{1/2}}\cdot$$
$$\cdot J_1(2\pi(nN_2)^{1/2}b^{-1}t^{-1/2}),$$

$$N_1=(aN-k)b^{-1},\ N_2=ba^{-1}N_1^{1/2},\ E(a,b,k)=4\pi b^{-1}L(1,\chi_4)L(2,\chi_{04})^{-1}E(\chi_4),$$

где χ_{04} *– главный характер* $\bmod 4$,

$E(\chi_4)$ *– вычислимая константа,*

$L(s,\chi)$ *– L-функция Дирихле характера* χ.

Доказательство. Воспользуемся соотношением $r(n)=4\sum_{d|n}\chi_4(d)$. Тогда

$$A(a,b,k;N)=\sum_{\substack{k/a\le n\le N\\ an\equiv k(b)}} r(n)r((an-k)b^{-1})=4\sum_{\substack{k/a\le n\le N\\ an\equiv k(b)}} r(n)\sum_{d|(an-k)b^{-1}}\chi_4(d)=$$

$$=4\sum_{\substack{k/a\le n\le N\\ an\equiv k(b)}} r(n)\left(\sum_{\substack{d|(an-k)b^{-1}\\ d\le N_1^{1/2}}}\chi_4(d)+\sum_{\substack{d|(an-k)b^{-1}\\ d>N_1^{1/2}}}\chi_4(d)\right)=4\sum\nolimits_1+4\sum\nolimits_2. \tag{9}$$

Далее,

$$\sum\nolimits_1=\sum_{d\le N_1^{1/2}}\chi_4(d)\left(\sum_{\substack{an\equiv k(bd)\\ n\le N}} r(n)-\sum_{\substack{an\equiv k(bd)\\ n\le k/a}} r(n)\right). \tag{10}$$

Теперь, применяя леммы 2 и 1, получаем

$$4\sum\nolimits_1=4\pi(N-k/a)b^{-2}\sum_{\substack{d\le N_1^{1/2}\\ (d,a)=1}}\chi_4(d)\rho(a,k,bd)d^{-2}+S_1(N)+O((a/b)^{1/2}N^{1+\varepsilon}M^{-1/2}). \tag{11}$$

Аналогично,

$$\sum\nolimits_2=\sum_{\substack{an\equiv k(b)\\ k/a\le n\le N}} r(n)\sum_{\substack{dt=(an-k)b^{-1}\\ d>N_1^{1/2}}}\chi_4(d)=\sum_{t\le N_1^{1/2}}\ \sum_{\substack{an\equiv k(bt)\\ N_2t+k/a<n\le N}} r(n)\chi_4((an-k)b^{-1}t^{-1})=$$

$$=\sum_{t\le N_1^{1/2}}\left\{\sum_{\substack{an\equiv k(bt)\\ (an-k)b^{-1}t^{-1}\equiv 1(4)\\ N_2t+k/a<n\le N}} r(n)-\sum_{\substack{an\equiv k(bt)\\ (an-k)b^{-1}t^{-1}\equiv -1(4)\\ N_2t+k/a<n\le N}} r(n)\right\}=$$

$$=\sum_{\substack{t\le N_1^{1/2}\\ (t,a)=1}}\left\{\left(\sum_{\substack{an\equiv k+bt(4bt)\\ n\le N}} r(n)-\sum_{\substack{an\equiv k-bt(4bt)\\ n\le N}} r(n)\right)-\left(\sum_{\substack{an\equiv k+bt(4bt)\\ n\le N_2t+k/a}} r(n)-\sum_{\substack{an\equiv k-bt(4bt)\\ n\le N_2t+k/a}} r(n)\right)\right\}=$$

$$\sum_{\substack{t\le N_1^{1/2}\\ (t,a)=1}}\left\{\left(B(a,k+bt,4bt;N)-B(a,k-bt,4bt;N)\right)-\left(B(a,k+bt,4bt;N_2t)-B(a,k-bt,4bt;N_2t)\right)\right\}+$$

$$+O(N_1^{1/2}(k/a)^{\varepsilon})+O(ka^{-1}b^{-1}\log N_1).$$

Здесь воспользовались обозначениями леммы 2 и тривиально оценили суммы

$$\sum_{\substack{an\equiv k\pm bt(4bt)\\ N_2 t<n\le N_2 t+k/a}} r(n)\ .$$

Применяя лемму 2 и формулу Перрона для оценки сумм

$$\sum_{\substack{d\le N_1^{1/2}\\ (d,a)=1}} \chi_4(d)\rho(a,k,bd)d^{-2}\ ,\quad \sum_{\substack{t\le N_1^{1/2}\\ (t,a)=1}} (\rho(a,k+bt,4bt)-\rho(a,k-bt,4bt))t^{-2}\ ,$$

получаем доказательство леммы (подробнее см. [8]).

Лемма 4. *Пусть* $b_1,\dots,b_M; c_1,\dots,c_M$ *– различные вещественные числа. Тогда для любых* $a_1,\dots,a_M\in\mathbf{R}$ *справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{\substack{r,s\\ r\ne s}} \frac{a_r a_s \exp(i(b_r-c_s))}{(rs)^{1/4}(\sqrt{r}-\sqrt{s})}\right| << \sum_{r=1}^{M} a_r^2\ .$$

Эта лемма есть следствие общего результата Montgomery – Vaughan [11].

2. Основной результат. Теорема. *Пусть*

$(a,b)=(a,k)=(b,k)=1$, $b\equiv k\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$, $a>b$.

Тогда справедлива асимптотическая оценка при $X\to\infty$.

$$\frac{1}{X}\int_1^X\left(A(a,b,k;x)-E(a,b,k)\cdot\left(x-\frac{k}{a}\right)\right)^2 dx << \frac{a}{b^{5/3}}X^{(4/3)+\varepsilon}+\left(\frac{k}{ab}\right)^2\log^2 X\ .$$

Доказательство. Из леммы 3, в силу неравенства Коши, получаем

$$\int_{k/a}^X\left(A(a,b,k;x)-E(a,b,k)\cdot\left(x-\frac{k}{a}\right)\right)^2 dx << \sum_{i=1}^{3}\int_{k/a}^X |S_i(x)|^2\,dx+O\left(\frac{a}{b}\tau^2(b)\frac{X^{3+2\varepsilon}}{M}\right)+$$

$$+O\left(X^2\left(\frac{k}{a}\right)^{2\varepsilon}\right)+O\left(\left(\frac{k}{ab}\right)^2 X\log^2 X\right).\qquad(12)$$

Интегралы $\int_{k/a}^X |S_i(x)|^2\,dx$, $(i=1,2,3)$ рассматриваются по одинаковой схеме. Поэтому найдем оценку только первого интеграла:

$$\int_{k/a}^X |S_1(x)|^2\,dx=\frac{1}{b^2}\sum_{n_1,n_2\le M}\frac{1}{(n_1n_2)^{1/2}}\int_{k/a}^X x\sum_{d_1,d_2\le\sqrt{\frac{ax-k}{b}}}\frac{\Omega(n_1,k,bd_1)\Omega(n_2,k,bd_2)}{d_1d_2}\chi_4(d_1d_2)\cdot$$

$$\cdot J_1\left(\frac{2\pi\sqrt{n_1x}}{bd_1}\right)J_1\left(\frac{2\pi\sqrt{n_2x}}{bd_2}\right)dx\qquad(13)$$

Учтем, что

$$J_1(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot z^{-1/2}\cdot\cos\left(z-\frac{3\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right).$$

Поэтому на основании леммы 4 заключаем, что основной вклад в оценку

$$\int_{k/a}^{X} |S_1(x)|^2\, dx$$

дает интеграл

$$I = \frac{1}{b} \sum_{n_1, n_2 \le M} \frac{1}{(n_1 n_2)^{3/4}} \int_{k/a}^{X} \sqrt{x} \sum_{\substack{d_1, d_2 \le \sqrt{\frac{ax-k}{b}} \\ n_1 d_2^2 = n_2 d_1^2 \\ (d_1 d_2, a) = 1}} \frac{|\Omega(n_1, k, d_1)\Omega(n_2, k, d_2)|}{(d_1 d_2)^{1/2}}\, dx\,.$$

В работе [10] показано, что $|\Omega(n,k,d)| = O(d^{1/2}(n,d)^{1/2}\tau(d))$. Поэтому имеем

$$I <<= \frac{1}{b} \sum_{n_1, n_2 \le M} \frac{1}{(n_1 n_2)^{3/4}} \int_{k/a}^{X} \sqrt{x} \sum_{\substack{d_1, d_2 \le \sqrt{\frac{ax-k}{b}} \\ n_1 d_2^2 = n_2 d_1^2}} (n_1, d_1)^{1/2} (n_2, d_2)^{1/2} \tau(d_1)\tau(d_2) dx\,.$$

Заметим, что фиксируя n_1, n_2, d_1, имеем не более одного значения d_2, удовлетворяющего равенству $n_1 d_2^2 = n_2 d_1^2$. И тогда получаем

$$\sum_{n_1, n_2 \le M} \frac{1}{(n_1 n_2)^{3/4}} \sum_{\substack{d_1, d_2 \le \sqrt{\frac{ax-k}{b}} \\ n_1 d_2^2 = n_2 d_1^2}} (n_1, d_1)^{1/2} (n_2, d_2)^{1/2} \tau(d_1)\tau(d_2) <<$$

$$<< \sum_{n_1, n_2 \le M} \sum_{\substack{t_1 | n_1 \\ t_2 | n_2}} \frac{1}{(n_1 n_2)^{3/4}} \cdot \sum_{\substack{1 \le d_i \le \left(\frac{ax}{b}\right)^{1/2} \cdot t_i^{-1} \\ i = 1,2}} \tau(d_1 t_1)\tau(d_2 t_2)(t_1, t_2)^{1/2} <<$$

$$<< \left(\frac{ax}{b}\right)^{2\varepsilon} \sum_{n_1, n_2 \le M} \frac{\tau(n_1)\tau(n_2)}{(n_1 n_2)^{3/4}} \cdot \left(\frac{ax}{b}\right)^{1/2} << M^{1/2} \left(\frac{ax}{b}\right)^{(1/2) + 2\varepsilon} \log^2 M\,.$$

Отсюда

$$I << \frac{1}{b} \left(\frac{a}{b}\right)^{1+2\varepsilon} M^{1/2} X^2 \log^2 M\,.$$

Поэтому

$$\frac{1}{X} \int_{k/a}^{X} |S_1(x)|^2\, dx << \frac{a^{1+2\varepsilon}}{b^2} M^{1/2} X \log^2 M\,.$$

Такую же оценку получаем и для

$$\frac{1}{X} \int_{k/a}^{X} |S_i(x)|^2\, dx\,,\ (i = 2,3)\,.$$

Из (12)–(14) следует

$$\int\limits_{k/a}^{X}\left(A(a,b,k;x)-E(a,b,k)\left(x-\frac{k}{a}\right)\right)^2 dx << \frac{a}{b}\tau^2(b)\frac{X^{3+2\varepsilon}}{M}+X^2\left(\frac{k}{a}\right)^{2\varepsilon}+$$
$$+\left(\frac{k}{ab}\right)^2 X\log^2 X+\frac{a^{1+2\varepsilon}}{b^2}M^{1/2}X^2\log^2 M.$$

Выбирая $M=(bX)^{2/3}$, получим утверждение теоремы.

Следствие. Пусть $k << N^{2/3}a^{3/2}b^{1/6}$. Тогда при $a^{3/2}b^{1/2} << N$ для почти всех $N \le X$ и любого $\varepsilon > 0$ справедлива асимптотическая формула

$$A(a,b,k;N)=E(a,b,k)\cdot\left(N-\frac{k}{a}\right)+O\left(N^{(2/3)+\varepsilon}\left(a^{1/2}b^{-5/6}\right)^{1+\varepsilon}\right)$$

с постоянной в символе "O", зависящей только от ε.

В заключение заметим, что оценки среднего квадрата ошибки в асимптотических формулах позволяют высказывать гипотезы о поведении остаточных членов в индивидуальных аддитивных задачах. Так, учитывая Ω-результат Y. Motohashi [6] в задаче о числе решений уравнения

$$u_1\cdot u_2-v_1\cdot v_2=1,$$

можно преположить, что в формуле (5) при $a=b=k=1$ остаточный член $R(1,1,1;N)$ не может быть лучше $O\left(x^{1/2}\right)$.

1. **Ingham A. E.** Some asymptotic formulae in the theory of numbers // J. Lond. Math. Soc. – 1927.– **2**.– P. 202–208.
2. **Estermann T.** Uber die Darstellungen einer Zahl als Differez von zwei Producten // J. Reine Angew. Math.– 1931.– **164.**– S. 173–182.
3. **Исмоилов Д.** Асимптотическая формула в теории чисел // ДАН Тадж.ССР.– 1982.– **25.**– С. 320–324.
4. **Heath-Brown D. R.** The fourth power moment of the Riemann zeta-function // Proc. Lond. Math. Soc.– 1979.– (3) 38.– P. 385–422.
5. **Deshouillers J.-M., Iwaniec H.** An additive divisor problems // Proc. Lond. Math. Soc.– 1982.– 2 (26).– P. 1–14.
6. **Motohashi Y.** The binary additive divisor problem // Ann. Sci. Ecole Normale Superieure.– 1994.– (4) 27.– P. 529–572.
7. **Chalk J. H. H.** An Asymptotic Formulae for the Number of Solutions of a Quadratic Diophantine Equation // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada.– 1981.– VIII, № 27.– P. 215–220.
8. **Белозеров Г. С.** Асимптотические формулы для числа решений некоторых диофантовых уравнений: Дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.06.– Одесса, 1991.– 159 с.
9. **Bantle G.** An asymptotic formula for B-twins // Acta Arithm.– 1986.– XLII, № 4.– P. 297–312.
10. **Варбанец П. Д.** Проблема круга в арифметической прогрессии // Мат. заметки.– 1970.– Т. 8, № 6.– С. 787–798.
11. **Montgomery H., Vaughan R.** Hilbert's inequality // J. Lon. Math. Soc.– 1974.– (2) 8.– P. 95–113

Получено 20.09.2002 г.