

УДК 517.911.5

А. Н. Витюк

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С МНОГОЗНАЧНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
“Диференціальні вклучення та оптимальне керування” ОНУ 08.10.2002 р.

Доведено теорему існування та єдиності для диференціальних рівнянь з багатозначними розв'язками $(D_0^\alpha Y)(x) = F(x, Y(x))$, $Y_{1-\alpha}(0) = Y_0$, $Y_0 \in \text{conv } R^n$, де $\alpha \in (0,1)$ і $(D_0^\alpha Y)(x)$ – похідна Рімана – Ліувілля порядку α .

Доказана теорема існування і єдиності для диференціальних рівнянь з багатозначними рішеннями $(D_0^\alpha Y)(x) = F(x, Y(x))$, $Y_{1-\alpha}(0) = Y_0$, $Y_0 \in \text{conv } R^n$, де $\alpha \in (0,1)$ і $(D_0^\alpha Y)(x)$ – похідна Рімана – Ліувілля порядку α .

Uniqueness and existence theorem for differential equations with set-valued solutions $(D_0^\alpha Y)(x) = F(x, Y(x))$, $Y_{1-\alpha}(0) = Y_0$, $Y_0 \in \text{conv } R^n$, where $\alpha \in (0,1)$ and $(D_0^\alpha Y)(x)$ is a Riemann – Liouville derivative of order α , is proved.

Дифференциальные уравнения с производной Хукухары изучали F. S. De Blasi, F. Iervolino, M. Kisielewicz, A. A. Толстоногов и другие (см. [1]).

В настоящей работе определяется понятие производной дробного порядка от многозначного отображения в смысле Рімана – Ліувілля и приведены условия существования и единственности решения дифференциального уравнения дробного порядка с багатозначними рішеннями в классе непрерывных багатозначных отображений.

1. Ниже используются следующие обозначения.

Пусть R^n – пространство векторов размерности n с нормой $\|\cdot\|$ и нулевым элементом θ ; $C(P, Y)$, $AC(P, Y)$, $L(P, Y)$ – пространства непрерывных, абсолютно непрерывных, суммируемых отображений $f: P \rightarrow Y$; $\text{comp } R^n(\text{conv } R^n)$ – совокупность непустых и компактных (выпуклых и компактных подмножеств) R^n с метрикой Хаусдорфа $h(\cdot, \cdot)$.

Для $A, B \in \text{comp } R^n$ и $\lambda \in R^1$ полагаем $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$. Разностью множеств A и B называем такое множество $C \in \text{comp } R^n$, что $A = B + C$; $S = \{v \in R^n : \|v\| = 1\}$, $R_+ = [0, +\infty)$.

Пусть $\varphi, \psi \in R^n$. Тогда (φ, ψ) – их скалярное произведение, а $c(A, \psi)$ – опорная функция [1] множества A в направлении вектора ψ . Многозначное отображение (м. о.) $F: J \rightarrow \text{comp } R^n$ интегрально ограничено на J ($J = (0, a]$, $\bar{J} = [0, a]$), если существует

функция $m(x) \in L(J, R_+)$ такая, что $|F(x)| \leq m(x)$ почти всюду (п. в.) на J . М. о. $F(x): \bar{J} \rightarrow \text{conv } R^n$ имеет в точке x_0 производную Хукухары [2], если существует такое множество $D_H F(x) \in \text{conv } R^n$, что в метрике Хаусдорфа

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} (F(x_0 + \delta) - F(x_0)) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} (F(x_0) - F(x_0 - \delta)) = D_H F(x_0).$$

2. Пусть м. о. $F(x): \bar{J} \rightarrow \text{conv } R^n$ измеримо и интегрально ограничено. Через $S(F)$ обозначим множество селекторов м. о. $F(x)$, которое не пусто [1]. Тогда

$$(I_0^\alpha F)(x) = \left\{ (I_0^\alpha f)(x) : f \in S(F) \right\}$$

называем *интегралом Римана – Лиувилля порядка $\alpha > 0$ от м. о. $F(x)$* . Заметим, что

$$(I_0^0 F)(x) = F(x) \text{ для п. в. } x \in J, \text{ а } (I_0^1 F)(x) = \int_0^x F(t) dt \text{ – интеграл Аумана.}$$

Справедливы следующие утверждения, доказательства которых приведены в работе [4].

Теорема 1. Если м. о. $F(x): J \rightarrow \text{conv } R^n$ измеримо и интегрально ограничено, то интеграл Римана – Лиувилля порядка $\alpha > 0$ от м. о. $F(x)$ определен п. в. на J , является выпуклым множеством и

$$(I_0^\alpha I_0^\beta F)(x) = (I_0^{\alpha+\beta} F)(x), \beta > 0, \quad (1)$$

$$C((I_0^\alpha F)(x), \Psi) = (I_0^\alpha C(F, \Psi))(x), \Psi \in R^n. \quad (2)$$

Определим понятие производной Римана – Лиувилля порядка $\alpha \in (0, 1)$ от м. о. $F(x)$. Если м. о. $F(x): J \rightarrow \text{conv } R^n$ измеримо и интегрально ограничено, а м. о. $F_{1-\alpha}(x) = (I_0^{1-\alpha} F)(x)$ п. в. на J имеет производную Хукухары, то $(D_0^\alpha F)(x) = D_H F_{1-\alpha}(x)$ называем *производной Римана – Лиувилля порядка α от $F(x)$* .

Теорема 2. Пусть м. о. $F(x): \bar{J} \rightarrow \text{conv } R^n$ абсолютно непрерывно и для любых $x_1, x_2 \in \bar{J}$, $x_1 < x_2$, $F(x_2) = F(x_1) + T(x_1, x_2)$, где $T(x_1, x_2) \in \text{conv } R^n$. Тогда п. в. на \bar{J} существует производная Римана – Лиувилля $(D_0^\alpha F)(x)$.

3. Далее речь пойдет об условиях разрешимости дифференциального уравнения

$$(D_0^\alpha Y)(x) = F(x, Y(x)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3)$$

решение которого удовлетворяет начальному условию

$$Y_{1-\alpha}(0) = Y_0, \quad Y_0 \in \text{conv } R^n. \quad (4)$$

Предположим, что м. о. $F(x, Y): \bar{J} \times \text{conv } R^n \rightarrow \text{conv } R^n$ удовлетворяет условиям:

- (а) $F(\cdot, Y): \bar{J} \rightarrow \text{conv } R^n$ измеримо для каждого $Y \in \text{conv } R^n$;
- (б) $F(x, \cdot): \text{conv } R^n \rightarrow \text{conv } R^n$ непрерывно для каждого $x \in \bar{J}$;

(в) существует функция $m(x) \in L(J, R_+)$ такая, что $|F(x, Y)| \leq m(x)$, причем

$$(I_0^\alpha m)(x) \in C(J, R^1), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (I_0^\alpha m)(x) = 0. \quad (5)$$

Пусть $\gamma(x) = (I_0^\alpha m)(x)$. Согласно (5), положив $\gamma(0) = 0$, получим, что $\gamma(x) \in C(\bar{J}, R_+)$.

Определение 1. Под решением задачи (3), (4) понимаем м. о. $Y(x): J \rightarrow \text{conv } R^n$ такое, что:

- 1) $Y(x) \in C(J, \text{conv } R^n)$;
- 2) $Y_{1-\alpha}(x) \in AC(\bar{J}, \text{conv } R^n)$, $Y_{1-\alpha}(0) = Y_0$;
- 3) $(D_0^\alpha Y)(x) = F(x, Y(x))$ для п. в. $x \in \bar{J}$.

Теорема 3. Пусть м. о. $F(x, Y): \bar{J} \times \text{conv } R^n \rightarrow \text{conv } R^n$ удовлетворяет условиям (а), (б), (в). Для того чтобы $Y(x): J \rightarrow \text{conv } R^n$ было решением задачи (3), (4), необходимо и достаточно, чтобы $Y(x)$ удовлетворяло уравнению

$$Y(x) = \frac{x^{\alpha-1} Y_0}{\Gamma(\alpha)} + (I_0^\alpha F(x, Y))(x). \quad (6)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $Y(x)$ – решение задачи (3), (4). В силу определения производной Римана – Лиувилля порядка α от м. о. $Y(x)$ получим

$$Y_{1-\alpha}(x) = Y_0 + (I_0^1 F(x, Y))(x). \quad (7)$$

Используя (2), непосредственно проверяем, что $(I_0^{1-\alpha} \Phi)(x) = Y_0$, где $\Phi(x) = \frac{x^{\alpha-1} Y_0}{\Gamma(\alpha)}$, а $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Теперь в соответствии с соотношением (1) можно (7) представить в виде

$$(I_0^{1-\alpha} Y)(x) = (I_0^{1-\alpha} \Phi)(x) + (I_0^{1-\alpha} I_0^\alpha F(x, Y))(x). \quad (8)$$

Интеграл Римана – Лиувилля от левой и правой частей (8) дает

$$(I_0^1 Y)(x) = (I_0^1 I_0^\alpha F(x, Y))(x) + (I_0^1 \Phi)(x). \quad (9)$$

Так как [2] $D_H(I_0^1 V)(x) = V(x)$ для п. в. $x \in \bar{J}$, то производная Хукухары от левой и правой частей (9) дает (6).

Достаточность. Пусть м. о. $Y(x): J \rightarrow \text{conv } R^n$ удовлетворяет уравнению (6). Докажем, что $Y(x)$ является решением задачи (3), (4). Предварительно докажем, что

$$Y(x) \in C(J, \text{conv } R^n).$$

Для этого достаточно доказать, что

$$(I_0^\alpha F(x, Y))(x) \in C(J, \text{conv } R^n).$$

Пусть $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$. Тогда, если $\rho(x) = c(F(x, Y(x)), \Psi)$, то

$$B = h \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} F(t, Y(t)) dt, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{\alpha-1} F(t, Y(t)) dt \right) \leq$$

$$\leq \max_{\psi \in S} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_1} |(x_2 - t)^{\alpha-1} - (x_1 - t)^{\alpha-1}| \cdot |\rho(t)| dt + \max_{\psi \in S} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} |\rho(t)| dt.$$

Так как $|\rho(t)| \leq |F(t, Y(t))| \cdot \|\psi\| \leq m(t)$, то

$$B \leq |\gamma(x_2) - \gamma(x_1)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} m(t) dt. \quad (10)$$

Воспользовавшись тем, что $(x_2 - t)^{\alpha-1} m(t) \in L((x_1, x_2), R_+)$, абсолютной непрерывностью интеграла Лебега и соотношением (10), получим, что $Y(x) \in C(J, \text{conv } R^n)$, т.е. $Y(x)$ удовлетворяет первому условию определения 1.

Из соотношения $Y_{1-\alpha}(x) = Y_0 + (I_0^1 F(x, Y))(x)$ следует, что $Y(x)$ удовлетворяет второму и третьему условиям определения 1. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Если м. о. $F(x, Y): \bar{J} \times \text{conv } R^n \rightarrow \text{conv } R^n$ удовлетворяет условиям (а), (б), (в), то множество решений задачи (3), (4) не пусто.

Доказательство. Пусть $Y^{(0)}(x) = \frac{x^{\alpha-1} Y_0}{\Gamma(\alpha)}$. Рассмотрим последовательность

$$Y^{(m+1)}(x) = Y^{(0)}(x) + I_0^\alpha F(x, Y^{(m)}(x)), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Из доказательства теоремы 3 следует, что $Y^{(m)}(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ удовлетворяют первым двум условиям определения 1. Введем в рассмотрение последовательность $\{T^{(m)}(x)\}$, где $T^{(m)}(x) = x^{1-\alpha} Y^{(m)}(x)$. Так как

$$h \left(T^{(m)}(x), \frac{Y_0}{\Gamma(\alpha)} \right) \leq \left| x^{1-\alpha} (I_0^\alpha F(x, Y^{(m)}(x))) \right| \leq \frac{a^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} m(t) dt,$$

то $\lim_{x \rightarrow 0^+} h \left(T^{(m)}(x), \frac{Y_0}{\Gamma(\alpha)} \right) = 0$. Поэтому, полагая $T^{(m)}(0) = \frac{Y_0}{\Gamma(\alpha)}$, получим, что

$T^{(m)}(x) \in C(\bar{J}, \text{conv } R^n)$. Проверим, что множество $T^{(m)}(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ удовлетворяет

условиям теоремы Арцела [3]. Имеем $|T^{(m)}(x)| \leq \frac{|Y_0|}{\Gamma(\alpha)} + a^{1-\alpha} \max_J \gamma(x)$.

Если $x_1, x_2 \in \bar{J}$, $x_1 < x_2$, а $\rho_m(t) = c(F(t, Y^{(m)}(t)), \psi)$, то

$$h(T^{(m)}(x_1), T^{(m)}(x_2)) =$$

$$= \max_{\psi \in S} \left| \frac{x_2^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} \rho_{m-1}(t) dt - \frac{x_1^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{\alpha-1} \rho_{m-1}(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{a^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} |\gamma(x_2) - \gamma(x_1)| + 2 \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} m(t) dt + \frac{(x_2 - x_1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \max_J \gamma(x).$$

Отсюда следует, что множество $T^{(m)}(x) : \bar{J} \rightarrow \text{conv } R^n$, $m = 0, 1, 2, \dots$ равномерно непрерывно. В силу теоремы Арцела существует подпоследовательность (обозначим ее также), равномерно сходящаяся к непрерывному отображению $T : \bar{J} \rightarrow \text{conv } R^n$. Тогда для каждого $x \in J$ $\lim_{m \rightarrow \infty} Y^{(m)}(x) = Y(x)$, $Y(x) = x^{\alpha-1}T(x)$. А так как $(x-t)^{\alpha-1} \left| F(t, Y^{(m)}(x)) \right| \leq (x-t)^{\alpha-1} m(t)$, то [1] в метрике Хаусдорфа для $x \in J$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(t, Y^{(m)}(t)) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(t, Y(t)) dt.$$

Окончательно из (11) для $x \in J$ получаем $Y(x) = \frac{x^{\alpha-1}Y_0}{\Gamma(\alpha)} + \left(I_0^\alpha F(x, Y) \right)(x)$. В силу теоремы 3 $Y(x)$ – решение задачи (3), (4).

Теорема 5. Пусть м. о. $F(x, Y) : \bar{J} \times \text{conv } R^n \rightarrow \text{conv } R^n$ удовлетворяет условиям (а), (б), (в) и условию Липшица, т. е. для любых $Y, U \in \text{conv } R^n$,

$$h(F(x, Y), F(x, U)) \leq Kh(Y, U), \quad (12)$$

причем $Ka^\alpha < \Gamma(1+\alpha)$. Тогда задача (3), (4) имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть $Y(x)$, $Y_1(x)$ – два решения задачи (3), (4), а

$$z(x) = h(Y(x), Y_1(x)) = h\left(\left(I_0^\alpha F(x, Y) \right)(x), \left(I_0^\alpha F(x, Y_1) \right)(x) \right).$$

Отсюда с учетом условия (в) следует, что $z(x) \in C(\bar{J}, R_+)$. Кроме того, в силу (12)

$$z(x) \leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} z(t) dt. \quad (13)$$

Пусть $T = \max_{\bar{J}} z(x)$. Из (13) получаем $T \leq (KTa^\alpha) / \Gamma(\alpha+1)$, т.е. $Ka^\alpha \geq \Gamma(1+\alpha)$, что противоречит условию $Ka^\alpha < \Gamma(1+\alpha)$. Теорема 5 доказана.

Заключение. Таким образом, в работе получены достаточные условия существования и единственности решения задачи (3), (4) в классе непрерывных многозначных отображений.

1. Благодатских В.Н., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. мат. ин-та АН СССР.– 1985.– Т. 169.– С. 194–252.
2. Nakuhara M. Integration des applications mesurable don't la valeur est un compact convexe // Func. Ekvacioj.– 1967.– V. 10, № 16.– P. 205–223.
3. Nakuhara M. Sur l'application mesurables don't la valeur est un compact convexe // Func. Ekvacioj.– 1967.– V. 10, № 10.– P. 43–66.
4. Витюк А. Н. Дробное дифференцирование многозначных отображений // Доповіді НАН України.– 2003.– № 10.– С. 75–78.

Получено 21.10.2002 г.