

Расчет коробчатых оболочек

Попов Г.Я., Реут В.В.

(Одесса)

В данной работе предлагается новый подход к расчету коробчатых оболочек, сводящийся к решению задачи о напряженном состоянии пластинки с дефектами. Достоинством этого подхода служит то, что во-первых, он позволяет сократить в постановке задачи количество дифференциальных уравнений и условий стыковки, во-вторых, он сводится к проблеме, методы решения которой в последнее время интенсивно развивались [1,2]. В качестве иллюстрации метода строится точное решение задачи о напряженном состоянии коробчатой оболочки в виде бесконечной треугольной пирамиды, все двугранные углы которой прямые.

Рассмотрим две клиновидные пластинки, имеющие общий луч и расположенные во взаимноперпендикулярных плоскостях (см. рис.1). Введем для каждой из них индивидуальную цилиндрическую систему координат τ_1, θ_1, z_1 . Математически такая задача эквивалентна отысканию решения системы четырех

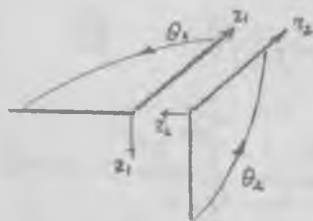


Рис. 1.

бигармонических уравнений (описывающих изгиб и плоское напряженное состояние каждой из пластинок) и удовлетворению восьми условий стыковки при $\theta_1 = \theta_2 = 0$
 $z_1 = z_2 = 0$
 (I)

$$(1) u_i = u_2, v_i = w_2, w_i = -v_2, \varphi_i = \varphi_2$$

$$V_0^{(i)} = -h\sigma_0^{(i)}, V_0^{(2)} = h\sigma_0^{(2)}, \tau_{z0}^{(i)} = \tau_{z0}^{(2)}, M_0^{(i)} = M_0^{(2)}$$

Здесь u_i, v_i, w_i - перемещения в i -ой пластинке в направлении осей z_i, θ_i .

$$z_i, \varphi_i = z_i' \partial u_i / \partial \theta_i, M_0^{(i)}$$

$V_0^{(i)}, \sigma_0^{(i)}, \tau_{z0}^{(i)}$ - моменты, обобщенные поперечные силы, нормальные и касательные напряжения.



Рис. 2

Предлагается мысленно распрямить двугранный угол между пластинками и рассматривать напряженное состояние клиновидной пластинки $\{-\alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r < \infty\}$, имеющей вдоль луча $\theta=0$ дефект (см.рис.2). Таким образом задача сведется к отысканию решения системы двух бигармонических уравнений (описывающих плоское напряженное состояние и изгиб пластинки) удовлетворяющего на луче $\theta=0$ условиям стыковки

$$(2) \quad \langle u \rangle = \langle \tau_{z0} \rangle = \langle \varphi_0 \rangle = \langle M_0 \rangle = 0$$

$$\langle v \rangle = w^- + w^+, \quad \langle w \rangle = - (v^- + v^+)$$

$$\langle V_0 \rangle = -h(\sigma_0^- + \sigma_0^+), \quad \langle h\sigma_0 \rangle = V_0^+ - V_0^-$$

При этом

$$(3) \quad f^\pm = \lim_{\theta \rightarrow \pm 0} f(\theta), \quad \langle f \rangle = f^- - f^+$$

$$\begin{pmatrix} w, \varphi_0, M_0, V_0 \\ \sigma_0, \tau_{z0}, v, u \end{pmatrix} (z, \theta) = \begin{pmatrix} w_i, \varphi_i, M_0^{(i)}, V_0^{(i)} \\ \sigma_0^{(i)}, \tau_{z0}^{(i)}, v_i, u_i \end{pmatrix}$$

причем $i=1$ при $-\alpha \leq \theta \leq 0$ и $i=2$ при $0 \leq \theta \leq \beta$

Преимущество такой постановки заключается в том, что удалось вдвое сократить количество уравнений и фактически

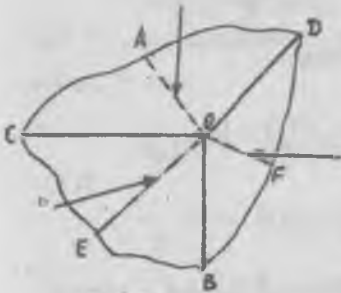


Рис. 3

адвое количество условий стыковки. Кроме того, методы расчета пластин и с дефектами хорошо в последнее время разработаны. Для иллюстрации предлагаемого выше подхода рассмотрим задачу о напряженном состоянии коробчатой оболочки в виде

бесконечной треугольной пирамиды, все двугранные углы которой прямые (см. фиг. 3). Для простоты будем рассматривать только случай, когда нагрузка, приложенная к оболочке, нормальна к срединной плоскости и симметрична относительно плоскостей AOB , EOD и COF — являющихся биссектральными плоскостями двугранных углов. В связи с этим рассматривать далее будем уголковую конструкцию $AOFD$ (рис. 3).

Математически такая задача сводится к отысканию решения системы дифференциальных уравнений

$$(4) \quad \begin{aligned} D \Delta^2 w(r, \theta) &= q(r, \theta) \\ 2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0, \quad 0 < r < \infty, |\theta| < \pi/4$$

Удовлетворяющего граничным условиям (условиям симметрии)

$$(5) \quad \theta = \pm \pi/4, \quad \varphi_\theta = V_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = v = 0$$

и условиям стыковки (2). При этом в силу симметрии задачи относительно $\theta = 0$

$$(6) \quad \psi^- = \psi^+, \quad \sigma_0^- = \sigma_0^+, \quad \omega^- = \omega^+, \quad V_0^- = V_0^+$$

и, следовательно, (2) можно переписать

$$(7) \quad \langle u \rangle = \langle \tau_{z0} \rangle = \langle \psi_0 \rangle = \langle M_0 \rangle = 0$$

$$\langle \omega \rangle = 0, \quad \langle h \sigma_0 \rangle = 0$$

$$\langle V_0 \rangle = -2h \sigma_0^*(z, 0), \quad \langle v \rangle = 2\omega(z, 0)$$

После трансформации Меллина

$$(8) \quad \begin{pmatrix} \omega_p, \psi_p, M_p, V_p, q_p \\ \sigma_p, \tau_p, u_p, v_p \end{pmatrix} = \int_0^\infty \begin{pmatrix} z^2 \omega, z^2 \psi, M_0, V_0, q/D \\ \sigma_0, \tau_{z0}, z'u, z'v \end{pmatrix} z^p dz$$

Дифференциальные уравнения (4), согласно [4], преобразуются к системе дифференциальных уравнений

$$(9) \quad L \omega_p \equiv \left[\frac{d^2}{d\theta^2} + (p+1)^2 \right] \left[\frac{d^2}{d\theta^2} + (p-1)^2 \right] \omega_p(\theta) = q_p(\theta)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\theta^2} + (p+1)^2 \right] \left[\frac{d^2}{d\theta^2} + (p-1)^2 \right] \sigma_p(\theta) = 0$$

а граничные условия (5) и условия стыковки (7) в трансформантах Меллина приобретают соответственно вид

$$(10) \quad \theta = \pm \pi/4, \quad \psi_p = V_p = 0, \quad \tau_p = v_p = 0$$

$$(11) \quad \langle u_p \rangle = \langle \tau_p \rangle = \langle \sigma_p \rangle = 0, \quad \langle \omega_p \rangle = \langle \psi_p \rangle = \langle M_p \rangle = 0$$

$$(12) \quad \langle V_{p-1} \rangle = -2h \sigma_p(0), \quad \langle v_p \rangle = 2\omega_{p-1}(0)$$

Очевидно, что классические (гладкие) решения дифференциальных уравнений (9) не позволят удовлетворить стыковке (11).

Разрывные решения системы дифференциальных уравнений (9), удовлетворяющие граничным условиям (10), будем искать в виде

$$(13) \quad \omega_p(\theta) = \omega_q(\theta, p) + D' \langle V_p \rangle G_p(\theta, 0)$$

$$\sigma_p(\theta) = \langle v_p \rangle E p^2(p^2-1) G_p(\theta, 0)$$

Здесь $\langle V_p \rangle$ и $\langle v_p \rangle$ трансформанты меллина искомого скачка поперечной силы V_θ и перемещения v

$$(14) \quad \omega_q(\theta, p) = \frac{1}{D} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} q_p(\psi) G_p(\theta, \psi) d\psi$$

а $G_p(\theta, \psi)$ - функция Грина краевой задачи

$$(15) \quad Lf = q, \quad \theta = \pm \pi/4, \quad f' = f'' = 0$$

Подставив (13) в условия стыковки (11) и исключая скачок $\langle V_p \rangle$, приходим к задаче Карлемана для полосы теории аналитических функций [3].

$$(16) \quad \Phi(p+2) + K(p)\Phi(p) + F(p) = 0, \quad \text{Re } p = c$$

Здесь

$$(17) \quad \Phi(p) = \frac{\langle V_{p-1} \rangle}{\lambda^{p-2} \Gamma(p+1)}, \quad F(p) = \frac{D \omega_q(0, p+1)}{\lambda^{1+p/2} \Gamma(p+3) G_{p+1}(0, 0)}$$

$$K(p) = \frac{\sin \pi p}{2[\cos \pi p/2 - p+1][\sin \pi p/2 + p]}, \quad \lambda = \frac{D}{4Eh}$$

Решение этой задачи строится в квадратурах [3]

$$(16) \quad \Phi(p) = -X(p) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \frac{F(s) ds}{X(s+2) \sin \pi(p-s)/2}$$
$$X(p) = \exp \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \ln K(s) \operatorname{ctg} \pi(s-p)/2 ds \right]$$

Здесь Ω - контур в комплексной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, трещин, включений и подкреплений - М., Наука, 1982 г., с.342
2. Вережницкий Л.Т., Делявский М.В., Манаски В.В. - Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин - Киев: Наукова думка, 1979, с.391
3. Банцури Р.Д. - Контактная задача для клина с упругим креплением // ДАН СССР, т.211, № 4, 1973 г., с.797-800.
4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. - М.-Л., АКАДЕМИЯ НАУК СССР, 1963 г., с.367