Вісник Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат.науки.– 1999.– Т.4, вип.4.– С.106–110.

УДК 519.6:539.3

**В. В. Вербицкий**
Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

# КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

**Приведені деякі чисельні результати, які ілюструють сбіжність змішаного методу кінцевих елементів в лінійній і квадратичній задачах на власні значення стійкості пологих оболонок.**

**Приведены некоторые численные результаты, иллюстрирующие сходимость смешанного метода конечных элементов в линейной и квадратичной задачах на собственные значения устойчивости пологих оболочек.**

Some numerical results showing actual convergence behavior of a mixed finite element scheme for linear and linear bigarmonic eigenvalue problems with shallow shell buckling are presented.

**Введение.** Пусть $\Omega$ – выпуклая многоугольная область из $R^2$ с границей $\partial\Omega$. Определим вещественные гильбертовы пространства

$$M = [L_2(\Omega)]^3, \quad V = [H_0^1(\Omega)]^2 \times H_0^2(\Omega), \quad W = H_0^2(\Omega).$$

Вариационная формулировка квадратичной задачи на собственные значения устойчивости пологих оболочек с условиями Дирихле для бифуркационных составляющих перемещений $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ состоит в следующем: найти такую пару $(\lambda, u) \in C \times V$, что $u \neq 0$ и

$$a(\nabla_2 u_3, \nabla_2 v_3) + c(u, v) = \lambda d_1(u, v) + \lambda^2 d_2(u, v) \qquad \forall v \in V. \qquad (1)$$

Здесь

$$a(\nabla_2 u_3, \nabla_2 v_3) = \int_\Omega D_M[\partial_{11}u_3\partial_{11}v_3 + \partial_{11}u_3\partial_{22}v_3 + \partial_{22}u_3\partial_{11}v_3 + \partial_{22}u_3\partial_{22}v_3 -$$

$$-(1-\nu)(\partial_{11}u_3\partial_{11}v_3 + \partial_{11}u_3\partial_{11}v_3 + \partial_{11}u_3\partial_{11}v_3)]dxdy,$$

$$c(u, v) = \int_\Omega D_N[\varepsilon_1(u)\varepsilon_1(v) + \varepsilon_2(u)\varepsilon_2(v) + \nu\varepsilon_1(u)\varepsilon_2(v) +$$

$$+\nu\varepsilon_2(u)\varepsilon_1(v) + 0.5(1-\nu)\varepsilon_{12}(u)\varepsilon_{12}(v)]dxdy.$$

Билинейные формы $d_1(\cdot,\cdot), d_2(\cdot,\cdot)$ зависят от усилий и перемещений предварительного напряженно-деформированного состояния оболочки (см. [1], [3]).

Задача (1) равносильна задаче на собственные значения для самосопряженного квадратичного операторного пучка в пространстве $V$ [1]: найти такую пару $(\lambda, u) \in C \times V$, что $u \neq 0$ и

$$L(\lambda) = I - \lambda T_1 - \lambda^2 T_2 = 0.$$

Введем некоторые обозначения и определения. Пусть $\sigma(L)$ – спектр $L(\lambda)$. Полином

$$u(\lambda) = u^0 + (\lambda - \lambda_0)u^1 + \cdots + (\lambda - \lambda_0)^{k-1}u^{k-1},$$

где $u^i \in V$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $u^0 \neq 0$, будем называть корневым полиномом порядка $\nu = \nu(u(\lambda))$ оператор-функции $L(\lambda)$ в точке $\lambda_0$, если голоморфная функция $L(\lambda)u(\lambda)$ имеет в точке $\lambda_0$ нуль кратности $\nu \geq k$. При этом элементы $u^i$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, называются корневыми элементами порядка $i$, а замкнутая линейная оболочка всевозможных корневых элементов – корневым подпространством $J(L, \lambda_0)$ оператор-функции $L(\lambda)$

в точке $\lambda_0$. В частности, элементы $u^0$ называются собственными элементами, а их замкнутая линейная оболочка - собственным подпространством $N(L,\lambda_0)$ оператор-функции $L(\lambda)$ в точке $\lambda_0$. Ясно, что $N(L,\lambda_0)=N(L(\lambda_0))$.

Для этой задачи строилась дискретная задача с использованием схемы Германа-Джонсона смешанного метода конечных элементов. По этой схеме на каждом треугольнике неизвестными являются перемещения в вершинах треугольника и нормальные моменты к его сторонам. Для аппроксимации перемещений и моментов вводятся дискретные пространства $V_h$ и $M_h$, соответственно[1], [2]. Таким образом, задаче (1) соответствует следующая дискретная задача:

Найти такие $(\lambda_h,(m_{u_{3h}},u_h))\in C\times M_h\times V_h$, $(m_{u_{3h}},u_h)\neq 0$, что

$$\lambda_h\{a(m_{u_{3h}},m_{v_{3h}})+c(u_h,v_h)\}=\lambda_h d_1(u_h,v_h)+\lambda_h^2 d_2(u_h,v_h)\quad \forall v_h\in V_h. \qquad (2)$$

Свойства задач (1), (2) подробно исследованы в работе [1]. Ниже приведена теорема о сходимости собственных значений задачи (2) и численные результаты, иллюстрирующие сходимость собственных значений задачи (2) и линейной задачи на собственные значения, исследованной в [2].

**1.Сходимость собственных значений.** Сходимость собственных значений дискретной задачи (2) определяется следующей теоремой.

**Теорема 1.** *Пусть* $\lambda_h\in\sigma(L_h)$ *и* $\lambda_h\to\lambda_0\in\sigma(L)$ *при* $h\to 0$. *Тогда существует такая константа* $C>0$, *не зависящая от* $h$, *что выполняется оценка*

$$|\lambda_h-\lambda_0|^{\eta(L,\lambda_0)}\leq Ch\max_{e\in J(L,\lambda_0),\|e\|=1}(|e|_2+|e_3|_{3,\Omega}). \qquad (3)$$

*где* $|e|_2^2=|e_1|_{2,\Omega}^2+|e_2|_{2,\Omega}^2+|e_3|_{2,\Omega}^2$.

**Доказательство.** Пусть $\{e^1,\ldots,e^m\}$ - некоторый базис в $N(L,\lambda_0)$, а $e^i(\lambda)$ - корневые полиномы оператор-функции $L(\lambda)$ в точке $\lambda_0$ такие, что $e^i(\lambda_0)=e^i$, $\nu(e^i(\lambda_0))=\nu(e^i)$, $i=1,\ldots,m$. По определению корневого полинома порядка $\nu(e^i)$ имеем

$$[L(\lambda)e^i(\lambda)]^{(k)}_{\lambda=\lambda_0}=0,\quad k=0,1,\ldots,\nu(e^i)-1,\quad [L(\lambda)e^i(\lambda)]^{(\nu(e^i))}_{\lambda=\lambda_0}\equiv y^i\neq 0.$$

Значит,

$$L(\lambda)e^i(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[y^i+z^i(\lambda)],$$

где

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}z^i(\lambda)=0.$$

Положив $a(\nabla_2 u_3,\nabla_2 v_3)+c(u,v)=A(u,v)$, запишем последнее равенство в вариационном виде

$$A(e^i(\lambda)-\frac{(\lambda-\lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[y^i+z^i(\lambda)],v)=\lambda d_1(e^i(\lambda),v)+\lambda^2 d_2(e^i(\lambda),v)\quad \forall v\in V.$$

А теперь - то же самое в смешанной вариационной формулировке

$$a(m_e,\rho)-\tilde b(\rho,(e^i(\lambda))_3)=0,\quad \forall\rho\in\tilde M, \qquad (4а)$$

$$a(m_v,\rho)-\tilde b(\rho,v_3^i)=0,\quad \forall\rho\in\tilde M, \qquad (4б)$$

$$a(m_z,\rho)-\tilde{b}(\rho,z_3^i)=0,\quad \forall\rho\in\tilde{M},\tag{4в}$$

$$\tilde{b}(m_e,v_3)+c(e^i(\lambda),v)-\frac{(\lambda-\lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[\tilde{b}(m_y+m_z,v_3)+c(y^i+z^i,v)]=$$

$$=\lambda d_1(e^i(\lambda),v)+\lambda^2 d_2(e^i(\lambda),v)\quad \forall v\in\tilde{V}.\tag{4г}$$

Полагая $\lambda=\lambda_h$, из равенств (4) получим

$$a(m_e,\rho)-\tilde{b}(\rho,(e^i(\lambda_h))_3)=0,\quad \forall\rho\in\tilde{M},\tag{5а}$$

$$a(m_y,\rho)-\tilde{b}(\rho,y_3^i)=0,\quad \forall\rho\in\tilde{M},\tag{5б}$$

$$\tilde{b}(m_e,v_3)+c(e^i(\lambda_h),v)-\frac{(\lambda_h-\lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[\tilde{b}(m_y+m_z,v_3)+c(y^i+z^i,v)]=$$

$$=\lambda_h d_1(e^i(\lambda_h),v)+\lambda_h^2 d_2(e^i(\lambda_h),v)+o(|\lambda_h-\lambda_0|^{\nu(e^i)})\quad \forall v\in\tilde{V}.\tag{5в}$$

По теореме 3.2[1] можно выбрать такую подпоследовательность $\{u_h\}$, что $u_h\in N(L_h,\lambda_h)$, $\|u_h\|=1$ и при $h\to 0$ $u_h\to u^0$ сильно в $H$. $m_{u_{3h}}\to\nabla_2 u_3^0$ сильно в $M$ и $u^0\in N(L,\lambda_0)$. Так как $u_h\in N(L_h,\lambda_h)$, то

$$a(m_{u_{3h}},\rho_h)-\tilde{b}(\rho_h,u_{3h})=0,\quad \forall\rho_h\in M_h,\tag{6а}$$

$$\tilde{b}(m_{u_{3h}},v_{3h})+c(u_h,v_h)=\lambda_h d_1(u_h,v_h)+\lambda_h^2 d_2(u_h,v_h)\quad \forall v_h\in V_h.\tag{6б}$$

Положив в (5в) $v=u_h$, а в (6б) $v_h=\Sigma_h e^i(\lambda_h)$, вычтем (6б) из (5в). Учитывая симметричность билинейных форм $c(\cdot,\cdot), d_1(\cdot,\cdot), d_2(\cdot,\cdot)$, получим

$$\tilde{b}(m_y,u_{3h})-\tilde{b}(m_{u_{3h}},(\Sigma_h e^i(\lambda_h))_3)+c(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)-$$

$$-\frac{(\lambda_h-\lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[\tilde{b}(m_y,u_{3h})+c(y^i,u_{3h})]=\tag{7}$$

$$=\lambda_h d_1(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)+$$

$$+\lambda_h^2 d_2(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)+o(|\lambda_h-\lambda_0|^{\nu(e^i)}).$$

Используя свойство интерполянта $\Pi_h$ [1] и равенства (5а), (6а) при $\rho=m_{u_{3h}}$, $\rho_h=\Pi_h m_e$ соответсвенно, получим

$$\tilde{b}(m_y,u_{3h})-\tilde{b}(m_{u_{3h}},(\Sigma_h e^i(\lambda_h))_3)=$$

$$=a(\Pi_h m_e-m_e,m_{u_{3h}})+\tilde{b}(m_{u_{3h}},e^i(\lambda_h)_3-(\Sigma_h e^i(\lambda_h))_3).\tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), окончательно имеем

$$a(\Pi_h m_e-m_e,m_{u_{3h}})+\tilde{b}(m_{u_{3h}},e^i(\lambda_h)_3-(\Sigma_h e^i(\lambda_h))_3)+$$

$$c(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)-\frac{(\lambda_h-\lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[\tilde{b}(m_y,u_{3h})+c(y^i,u_{3h})]=$$

$$=\lambda_h d_1(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)+$$

$$+\lambda_h^2 d_2(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)+o(|\lambda_h-\lambda_0|^{\nu(e^i)}).\tag{9}$$

$$a(m_z,\rho)-\widetilde{b}(\rho,z_3^i)=0,\quad \forall\rho\in\widetilde{M}, \tag{4в}$$

$$\widetilde{b}(m_e,v_3)+c(e^i(\lambda),v)-\frac{(\lambda-\lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[\widetilde{b}(m_y+m_z,v_3)+c(y^i+z^i,v)]=$$

$$=\lambda d_1(e^i(\lambda),v)+\lambda^2 d_2(e^i(\lambda),v)\quad \forall v\in\widetilde{V}. \tag{4г}$$

Полагая $\lambda=\lambda_h$, из равенств (4) получим

$$a(m_e,\rho)-\widetilde{b}(\rho,(e^i(\lambda_h))_3)=0,\quad \forall\rho\in\widetilde{M}, \tag{5а}$$

$$a(m_y,\rho)-\widetilde{b}(\rho,y_3^i)=0,\quad \forall\rho\in\widetilde{M}, \tag{5б}$$

$$\widetilde{b}(m_e,v_3)+c(e^i(\lambda_h),v)-\frac{(\lambda_h-\lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[\widetilde{b}(m_y+m_z,v_3)+c(y^i+z^i,v)]=$$

$$=\lambda_h d_1(e^i(\lambda_h),v)+\lambda_h^2 d_2(e^i(\lambda_h),v)+o(|\lambda_h-\lambda_0|^{\nu(e^i)})\quad \forall v\in\widetilde{V}. \tag{5в}$$

По теореме 3.2[1] можно выбрать такую подпоследовательность $\{u_h\}$, что $u_h\in N(L_h,\lambda_h)$, $\|u_h\|=1$ и при $h\to 0$ $u_h\to u^0$ сильно в $H$, $m_{u_{3h}}\to\nabla_2 u_3^0$ сильно в $M$ и $u^0\in N(L,\lambda_0)$. Так как $u_h\in N(L_h,\lambda_h)$, то

$$a(m_{u_{3h}},\rho_h)-\widetilde{b}(\rho_h,u_{3h})=0,\quad \forall\rho_h\in M_h, \tag{6а}$$

$$\widetilde{b}(m_{u_{3h}},v_{3h})+c(u_h,v_h)=\lambda_h d_1(u_h,v_h)+\lambda_h^2 d_2(u_h,v_h)\quad \forall v_h\in V_h. \tag{6б}$$

Положив в (5в) $v=u_h$, а в (6б) $v_h=\Sigma_h e^i(\lambda_h)$, вычтем (6б) из (5в). Учитывая симметричность билинейных форм $c(\cdot,\cdot), d_1(\cdot,\cdot), d_2(\cdot,\cdot)$, получим

$$\widetilde{b}(m_y,u_{3h})-\widetilde{b}(m_{u_{3h}},(\Sigma_h e^i(\lambda_h))_3)+c(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)-$$

$$-\frac{(\lambda_h-\lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[\widetilde{b}(m_y,u_{3h})+c(y^i,u_{3h})]= \tag{7}$$

$$=\lambda_h d_1(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)+$$

$$+\lambda_h^2 d_2(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)+o(|\lambda_h-\lambda_0|^{\nu(e^i)}).$$

Используя свойство интерполянта $\Pi_h$ [1] и равенства (5а), (6а) при $\rho=m_{u_{3h}},\rho_h=\Pi_h m_e$ соответсвенно, получим

$$\widetilde{b}(m_y,u_{3h})-\widetilde{b}(m_{u_{3h}},(\Sigma_h e^i(\lambda_h))_3)=$$

$$=a(\Pi_h m_e-m_e,m_{u_{3h}})+\widetilde{b}(m_{u_{3h}},e^i(\lambda_h)_3-(\Sigma_h e^i(\lambda_h))_3). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), окончательно имеем

$$a(\Pi_h m_e-m_e,m_{u_{3h}})+\widetilde{b}(m_{u_{3h}},e^i(\lambda_h)_3-(\Sigma_h e^i(\lambda_h))_3)+$$

$$c(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)-\frac{(\lambda_h-\lambda_0)^{\nu(e^i)}}{\nu(e^i)!}[\widetilde{b}(m_y,u_{3h})+c(y^i,u_{3h})]=$$

$$=\lambda_h d_1(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)+$$

$$+\lambda_h^2 d_2(e^i(\lambda_h)-\Sigma_h e^i(\lambda_h),u_h)+o(|\lambda_h-\lambda_0|^{\nu(e^i)}). \tag{9}$$

нирным закреплением по краям. Панель имеет следующие безразмерные характеристики: $h = 0.2874$, $\nu = 0.3$, $R/h = 100$, $a = 10$, $b = 10$.

В линейной задаче на собственные значения предполагалось, что исходное равновесное состояние безмоментное и усилия в срединной поверхности панели линейно зависят от параметра нагружения. Усилия определялись из линейной задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочки при внешнем давлении $q = 1$. Последняя решалась смешанным методом конечных элементов.

В квадратичной задаче на собственные значения (1) также предполагалось, что исходное равновесное состояние безмоментное. Перемещения срединной поверхности панели в этом состоянии определялись опять же из линейной задачи при внешнем давлении $q = 1$. Но усилия, от которых зависит потеря устойчивости панели, вычислялись через найденные перемещения по нелинейным соотношениям.

При решении обеих задач использовалась регулярная триангуляция квадратной области на прямоугольные треугольники с катетами $a/N$. Вычислялись минимальные собственные значения и соответствующие им собственные функции обеих задач. По вычисленному минимальному собственному значению критическое давление определяется так: $q_c = \lambda_{\min}$.

Полученные результаты сравнивались с расчетами, выполненными в [5]. В этой работе пологая сферическая панель рассчитывалась на основании геометрически нелинейных уравнений методом конечных элементов. Согласно полученным там результатам, верхнее критическое давление $q_u = 0.9Eh^2/R^2$.

В таблице 1 приведены результаты вычислений, иллюстрирующие сходимость собственных чисел обеих задач. Из таблицы видно, что критическое давление определенное

*Таблица 1*

| $N$ | Линейная задача $q_c/q_u$ | Квадратичная задача $q_c/q_u$ |
|---|---|---|
| 6 | 1.10 | 1.07 |
| 8 | 1.32 | 1.19 |
| 10 | 1.40 | 1.23 |
| 12 | 1.45 | 1.25 |
| 14 | 1.48 | 1.27 |
| 16 | 1.49 | 1.28 |
| 18 | 1.51 | 1.28 |
| 20 | 1.51 | 1.28 |

из линейной задачи, завышено в 1.5 раза, а квадратичная задача завышает критическое давление в 1.3 раза. Собственные функции обеих задач полностью совпадают.

1. **Вербицкий В.В.** Смешанный метод конечных элементов в задаче на собственные значения нелинейной устойчивости пологих оболочек // Изв. вузов. Математика. 1998. - №11. - С. 22-31.
2. **Масловская Л.В., Вербицкий В.В.** Сходимость смешанного метода конечных элементов в задачах устойчивости пологих оболочек // Изв. вузов. Математика. - 1993. - №10. - С. 21-31.
3. **Stumpf H.** The stability equations of the consistent nonlinear elastic shell theory with moderate rotation // IUTAM - Symp. Stability in the Mechanicsof Continua. Numbrecht / Gemany 1981. - Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1982. - P. 89-100.
4. **Филиппович А.П.** Анализ смешанных схем метода конечных элементов в задачах о деформировании пологих оболочек // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 1988. - Т.28. - №5. - С. 741-754.
5. **Batoz J.L., Chattopadhyay A., Dhatt G.** Finite element large deflection analysis of shallow shells // International J. for numerical methods in engineering. 1976. - Vol.10. P.39-58.