Вісник Одеськ. держ. ун-ту. — 2000. — Т. 5, вип. 3. Фіз.-мат. науки. — С. 89–93.

УДК 517.9

О. Д. Кичмаренко
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

СУЩЕСТВОВАНИЕ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ РЕШЕНИЙ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рекомендовано до друку науковим семінаром
"Диференціальні включення і оптимальне керування" ОНУ 18.05.2000 р.

У роботі розглядаються питання існування, единості та неперервності розв'язків квазідиференціальних рівнянь із змінним запізненням в локально-компактних метричних просторах.

В работе рассматриваются вопросы существования, единственности и непрерывности решений квазидифференциальных уравнений с переменным запаздыванием в локально-компактных метрических пространствах.

The problems of existence, uniqueness and continuity for the solutions of quasidifferential equations with variable delay in locally compact metric spaces are considered.

Введение. Исследование различных задач, в которых решениями являются пучки траекторий (ансамбли траекторий, многозначные траектории), привели к созданию теории квазидифференциальных уравнений (КДУ) в нелинейных метрических пространствах [1]. Существование, единственность и непрерывность решений КДУ в нелинейных метрических пространствах исследовались в [1–8]. В данной работе рассматриваются вопросы существования, единственности и непрерывности решений КДУ с переменным запаздыванием.

Пусть X – метрическое пространство с функцией расстояния $\delta(\cdot,\cdot)$, $\varphi:[0,\sigma)\times[0,T)\times X\times X\to X$ – отображение, задающее локальное квазидвижение, т.е. выполнены следующие условия:

Условие LD:

1) аксиома начальных условий: $\varphi(0,t,x)=x$;
2) аксиома квазиприпасовывания:

$$\delta(\varphi(h,t_0,x_0),\varphi(h_m,t_{m-1},x_{m-1}))=o(h),$$

где $h=\sum_{i=1}^{m}h_i,\quad h_i\ge 0,\quad t_i=t_0+\sum_{s=1}^{i}h_s,\quad x_i=\varphi(h_i,t_{i-1},x_{i-1})$;

3) аксиома непрерывности: отображение $\varphi(h,t,x)$ непрерывно.

Определение. *Аппроксимационное уравнение*

$$\delta(x(t+h),\varphi(h,t,x(t)))=o(h),\quad x(t_0)=x_0 \tag{1}$$

называется квазидифференциальным уравнением в метрическом пространстве.

Абсолютно непрерывное отображение $x:[0,T)\to X$, *удовлетворяющее* (1) *почти всюду, называется решением КДУ* (1).

КДУ с переменным запаздыванием. Рассмотрим КДУ с запаздыванием:

$$\delta(x(t+h), \psi(h,t,x(t),x(\alpha(t)))) = o(h), \quad x(0) = x_0. \tag{2}$$

где $0 \le \alpha(t) \le t$ – запаздывание, зависящее от времени; $\psi : [0,\sigma) \times [0,T) \times X \times X \to X$ – отображение, задающее локальное квазидвижение.

На множестве непрерывных отображений $x(t)$ определим равномерную метрику:

$$\rho(x(T), y(T)) = \max_{t \in [0,T]} \delta(x(t), y(t)).$$

Теорема 1. *Пусть X – локально-компактное метрическое пространство и в области $Q = \{h \in [0,\sigma], \quad t \in [0,T], \quad D \subset X, \quad D \subset X\}$ выполняются условия:*

1) *отображение $\psi(h,t,x,z)$ удовлетворяет условию Липшица по z и h:*

$$\delta(\psi(h,t,x,z_1), \psi(h,t,x,z_2)) \le h\gamma\delta(z_1,z_2), \ \delta(\psi(h_1,t,x,z), \psi(h_2,t,x,z)) \le \gamma|h_1 - h_2|,$$

а по x условию:

$$|\delta(x_1,x_2) - \delta(\psi(h,t,x_1,y), \psi(h,t,x_2,y))| \le h\gamma\delta(x_1,x_2),$$

где γ – постоянная ;

2) *отображение $F_y(h,t,x) = \psi(h,t,x,y(t))$, где $y(t)$ – липшицево с постоянной λ, удовлетворяет условию LD и условию Липшица по h с постоянной λ_1;*

3) *функция $\alpha(t)$ – непрерывна и $0 \le \alpha(t) \le t$.*

Тогда существует такое $t_1 \in (0,T]$, что при $t \in [0,t_1)$ существует решение уравнения (2).

Доказательство. Построим последовательность решений $\{x^n(t)\}$, $t \in [0,T]$:

$$\delta(x^n(t+h), \psi(h,t,x^n(t),x^{n-1}(\alpha(t)))) = o(h), \ x^n(0) = x_0, \ x^0(t) \equiv x_0. \tag{3}$$

Будем считать, что на множестве непрерывных отображений $x(t) \in X$, $t \in [0,T]$ задан оператор A, определенный уравнением (3), причем

$$x^n(\cdot) = Ax^{n-1}(\cdot), \quad x \in C([0,T], X).$$

Рассмотрим решения y^1 и y^2 уравнений:

$$\delta(y^1(t+h), F_1(h,t,y^1(t))) = o(h),$$
$$\delta(y^2(t+h), F_2(h,t,y^2(t))) = o(h),$$

где $F_1(h,t,y) = \psi(h,t,y,x^1(\alpha(t)))$, $\qquad F_2(h,t,y) = \psi(h,t,y,x^2(\alpha(t)))$.

Так как

$$\delta(F_1(h,t,y), F_2(h,t,y)) =$$
$$= \delta(\psi(h,t,y,x^1(\alpha(t))), \psi(h,t,y,x^2(\alpha(t)))) \le \gamma h\delta(x^1(\alpha(t)), x^2(\alpha(t))) \le \lambda h\delta_1,$$

то на основании [5] справедлива оценка:

$$\delta(y^1(t), y^2(t)) \le \beta(t)\delta_1, \quad \beta(t) = \frac{e^{\gamma t} - 1}{\gamma}\lambda,$$

где $\delta_1 = \rho(x^1(T), x^2(T))$.

Очевидно, что существует такое $t_1 \in (0,T]$, что $\beta(t) \le \beta_1 < 1$ при $t \in [0,t_1]$.

Таким образом, построенный оператор A переводит элементы пространства $C([0,T], X)$ в элементы того же пространства и выполняется неравенство:

$$\rho(A(x^1), A(x^2)) \le \beta_1\rho(x^1, x^2),$$

т.е. оператор A является оператором сжатия. Теорема доказана.

Рассмотрим уравнение:

$$\delta(x(t+h), g(\varepsilon, h, t, x(t), x(\alpha(t)))) = o(h), \quad x(0) = x_0, \tag{4}$$

где $t \in [0,T]$, $g : [0,\varepsilon_0) \times X \times X \to X$, ε – малый параметр, $\alpha(t)$ – запаздывание и $0 \le \alpha(t) \le t$.

Предположим, что существует предел

$$\bar{g}(h, x, y) = \lim_{\varepsilon \leftarrow 0} g(\varepsilon, h, t, x, y). \tag{5}$$

Поставим КДУ (4) в соответствие следующее КДУ:

$$\delta(y(t+h), \bar{g}(h, y(t), y(\alpha(t)))) = o(h), \quad y(0) = x_0. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть X – локально-компактное метрическое пространство и в области $Q = \{\varepsilon \in [0,\varepsilon_0), h \in [0,\sigma], t \in [0,T], D \subset X, D \subset X\}$ при каждом фиксированном $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ выполнены условия теоремы* 1 *и кроме того*:

1) *предел* (5) *существует равномерно относительно t, h, x, y;*
2) *отображения $\bar{g}(h,x,y)$ и $g_z(\varepsilon,h,t,x) := g(\varepsilon,h,t,x,z(t))$ удовлетворяют условию LD, условию Липшица по h с постоянной λ, где $z(t)$ – удовлетворяют условию Липшица с постоянной λ_1;*
3) *отображения $g(\varepsilon,h,t,x,y)$ удовлетворяет неравенству*

$$|\delta(x_1, x_2) - \delta(g(\varepsilon,h,t,x_1,y), g(\varepsilon,h,t,x_2,y))| \le h\gamma\delta(x_1,x_2);$$

4) *решение $y(t)$ уравнения* (6) *существует и вместе с ρ – окрестностью принадлежит области D.*

Тогда для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon^0(\eta) > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ и для любого $t \in [0,T)$ справедлива оценка

$$\delta(x(t), y(t)) \le \eta.$$

Доказательство. Разобьем промежуток $[0,L]$ на m частей точками $t_i = \Delta_i$, $\Delta = \dfrac{L}{m}$ и построим последовательности отображений

$$x^m(t) = g(\varepsilon, t-t_k, t_k, x^m(t_k), x^m(\alpha(t_k))), \quad x^m(0) = x_0, \tag{7}$$

$$y^m(t) = \bar{g}(t-t_k, y^m(t_k), y^m(\alpha(t_k))), \quad y^m(0) = x_0. \tag{8}$$

Здесь $t \in [t_k, t_{k-1}]$, $k = 0,1,\ldots,m-1$.

Оценим

$$\delta(x^m(t), x(t)) \le \delta(g(\varepsilon, \Delta, t_{k-1}, x^m(t_{k-1}), x^m(\alpha(t_{k-1}))), g(\varepsilon, \Delta, t_{k-1}, x(t_{k-1}), x(\alpha(t_{k-1})))) + o(\Delta) \le$$
$$\le (1-\gamma\Delta)\delta(x^m(t_{k-1}), x(t_{k-1})) + \gamma\Delta\delta(x^m(\alpha(t_{k-1})), x(\alpha(t_{k-1}))) + o(\Delta). \tag{9}$$

Следовательно,

$$\rho_k^m \le (1-\gamma\Delta)\rho_{k-1}^m + \gamma\Delta\rho_{k-1}^m + o(\Delta) = (1+2\gamma\Delta)\rho_{k-1}^m + o(\Delta),$$

$$\delta(x^m(t_k), x(t_k)) \le \frac{(1+2\gamma\Delta)^k - 1}{2\gamma}\frac{o(\Delta)}{\Delta} \le \frac{e^{2\gamma L} - 1}{2\gamma}\frac{o(\Delta)}{\Delta}, \tag{10}$$

где $\rho_k^m = \rho(x^m(t_k), x(t_k))$.

Аналогично получаем

$$\delta(y^m(t_k), y(t_k)) \le \frac{e^{2\gamma L} - 1}{2\gamma}\frac{o(\Delta)}{\Delta}. \tag{11}$$

При $t \in [t_{k-1}, t_k]$ имеем

$$\delta\left(y^m(t), y^m(t_{k-1})\right) \le \delta\left(\overline{g}\left(t - t_{k-1}, y^m(t_{k-1}), y^m(\alpha(t_{k-1}))\right), \overline{g}\left(\Delta, y^m(t_{k-1}), y^m(\alpha(t_{k-1}))\right)\right) \le$$

$$\le \lambda(t_k - t_{k-1}) \le \lambda\Delta,$$

$$(t), x^m(t_k)\Big) \le \lambda\Delta, \ \delta\left(x(t), x(t_k)\right) \le \lambda\Delta, \ \delta\left(y(t), y(t_k)\right) \le \lambda\Delta. \tag{12}$$

Следовательно,

$$\delta\left(y^m(t), y(t)\right) \le \delta\left(y^m(t), y^m(t_k)\right) + \delta\left(y^m(t_k), y(t_k)\right) + \delta\left(y(t_k), y(t)\right) \le$$

$$\le \frac{e^{2\gamma L} - 1}{2\gamma} \frac{o(\Delta)}{\Delta} + 2\lambda\Delta, \tag{13}$$

$$\delta\left(x^m(t), x(t)\right) \le \frac{e^{2\gamma L} - 1}{2\gamma} \frac{o(\Delta)}{\Delta} + 2\lambda\Delta. \tag{14}$$

Оценим

$$\delta\left(x^m(t_k), y^m(t_k)\right) \le$$

$$\delta\left(g\left(\varepsilon, \Delta, t_{k-1}, x^m(t_{k-1}), x^m(\alpha(t_{k-1}))\right), \overline{g}\left(\Delta, y^m(t_{k-1}), y^m(\alpha(t_{k-1}))\right)\right) \le$$

$$\le \delta\left(g\left(\varepsilon, \Delta, t_{k-1}, x^m(t_{k-1}), x^m(\alpha(t_{k-1}))\right), \overline{g}\left(\Delta, x^m(t_{k-1}), x^m(\alpha(t_{k-1}))\right)\right) +$$

$$+ \delta\left(\overline{g}\left(\Delta, y^m(t_{k-1}), y^m(\alpha(t_{k-1}))\right), \overline{g}\left(\Delta, x^m(t_{k-1}), x^m(\alpha(t_{k-1}))\right)\right) \le$$

$$\le (1 - \gamma\Delta)\delta\left(x^m(t_{k-1}), y^m(t_{k-1})\right) + \gamma\Delta\delta\left(x^m(\alpha(t_{k-1})), y^m(\alpha(t_{k-1}))\right) +$$

$$+ \delta\left(g\left(\varepsilon, \Delta, t_{k-1}, x^m(t_{k-1}), x^m(\alpha(t_{k-1}))\right), \overline{g}\left(\Delta, x^m(t_{k-1}), x^m(\alpha(t_{k-1}))\right)\right). \tag{15}$$

Из условия 1) теоремы следует, что существует $\varepsilon^0(\eta_1) > 0$ такое, что для любого $\varepsilon < \varepsilon^0$

$$\delta\left(g\left(\varepsilon, \Delta, t_{k-1}, x^m(t_{k-1}), x^m(\alpha(t_{k-1}))\right), \overline{g}\left(\Delta, x^m(t_{k-1}), x^m(\alpha(t_{k-1}))\right)\right) < \eta_1. \tag{16}$$

Из (15) и (16) имеем

$$\rho_k^m \le (1 + 2\gamma\Delta)\rho_{k-1}^m + \eta_1 \le \frac{e^{2\gamma L} - 1}{2\gamma} \frac{\eta_1}{\Delta}. \tag{17}$$

Таким образом, из (10)–(14), (17) имеем:

$$\delta\left(x(t), y(t)\right) \le \delta\left(x(t), x^m(t)\right) + \delta\left(x^m(t), x^m(t)\right) +$$

$$+ \delta\left(x^m(t_k), y^m(t_k)\right) + \delta\left(y^m(t_k), y^m(t)\right) + \delta\left(y^m(t), y(t)\right) \le$$

$$\le \sigma(\Delta) + \frac{e^{2\gamma\Delta} - 1}{2\gamma} \frac{\eta_1}{\Delta}, \tag{18}$$

где $\sigma(\Delta) = \dfrac{e^{\gamma T} - 1}{\gamma} \dfrac{o(\Delta)}{\Delta} + 6\lambda\Delta$.

Выберем m_0 так, чтобы при $m < m_0$ выполнялось неравенство $\sigma(\Delta) \le \eta/2$. Зафиксировав m и выбрав $\eta_1 < \dfrac{\eta\gamma\Delta}{2(e^{2\gamma T} - 1)}$, из (18) получим утверждение теоремы.

Заключение. Таким образом, в теореме 1 дано обоснование существования и единственности решения КДУ с переменным запаздыванием и предложен конструктивный алгоритм его построения. Теорема 2 переносит теоремы И.И. Гихмана, Б.М. Демидовича, М.А. Красносельского, С.Г. Крейна о непрерывности решений дифференциальных уравнений при интегральной непрерывности правой части [9] и соответствующие теоремы для КДУ без запаздывания[3–6] на КДУ с переменным запаздыванием. Метод усреднения для дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием рассматривался в [10,11].

1. **Панасюк А. И.** Квазидифференциальные уравнения в метрическом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 8. – С. 1344–1353.
2. **Панасюк А. И.** Квазидифференциальные уравнения в полном метрическом пространстве в условиях типа Каратеодори: В 2 ч. // Ч. 1: Дифференц. уравнения. –1995. – Т. 31, № 6. – С. 962–972; Ч. 2: Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 8. – С. 1361–1369.
3. **Плотников В. А., Плотникова Л. И.** Усреднение квазидифференциальных уравнений в метрических пространствах. // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 10. – С. 1678–1683.
4. **Plotnikov V. A., Plotnikova L. I.** Asymptotic methods for quasidifferential equations in the metric space // Functional Differential Equations, Israel. – 1996. – № 3. – P. 185–205.
5. **Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 1999. – 355 с.
6. **Плотников В. А.** Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложения к задачам оптимального управления // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 8. – С. 1427–1433.
7. **Плотников В. А., Кичмаренко О. Д.** Квазидифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом // Материалы Международной научной конференции "Совместные проблемы математики". – Часть 2. – Черновцы. – 1998. – С. 212–215.
8. **Aubin J.-P.** Mutational Equations in Metric Spaces // Set-Valued Analysis. – 1993. –V. 1, № 1. – P. 3–46.
9. **Митропольский Ю. А.** Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наукова думка, 1971. – 440 с.
10. **Філіпчук М. Н.** Усереднення деяких крайових задач для систем диференціальних рівнянь із змінним запізненням // Нелінійні коливання. – 1998. – № 2. – С. 152–156.
11. **Філіпчук М. П., Бігун Я. Й.** Чисельно-аналітичний метод дослідження крайових задач для систем диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Укр. матем. журнал. – 1998.– Т.50, № 11. – С1581–1585.