Вісник Одеськ. держ. ун-ту. — 2000. — Т. 5, вип. 3. Фіз.-мат. науки. — С. 57–61.

УДК 519.6:539.3

В. В. Вербицкий
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

СХОДИМОСТЬ СМЕШАННОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Рекомендовано до друку науковим семінаром
"Метод скінченних елементів та його застосування" ОНУ 21.09.2000

Розглянуто апроксимацію змішаним методом скінченних елементів задачі на власні значення коливань пологої оболонки. Доведено збіжність власних значень та відповідних їм власних векторів дискретної задачі.

Рассмотрена аппроксимация смешанным методом конечных элементов задачи на собственные значения колебаний пологой оболочки. Доказана сходимость собственных значений и соответствующих им собственных векторов дискретной задачи.

The approximation of a shallow shell vibration eigenproblem by the mixed finite element method is considered. The convergence of eigenvalues and eigenvectors of the discrete eigenproblem is proved.

Введение. При решении граничных задач теории оболочек смешанным методом конечных элементов (СМКЭ) наряду с неизвестными функциями в качестве независимых переменных выступают и некоторые их производные. Это позволяет понизить порядок производных в вариационных формулировках и использовать более простые и экономичные конечные элементы для аппроксимации неизвестных. Сходимость различных схем СМКЭ для задач о напряженно-деформированном состоянии оболочек исследована в [2,4,8]. В [1,5] получены оценки сходимости СМКЭ в задачах на собственные значения устойчивости пологих оболочек. В настоящей работе рассмотрены вопросы сходимости СМКЭ в задаче на собственные значения установившихся гармонических колебаний пологих оболочек.

1. Постановка задачи. Вариационная формулировка задачи свободных установившихся гармонических колебаний пологих оболочек [3,6] с условиями Дирихле для перемещений имеет вид: найти такую пару $(\lambda,u)\in R\times V$, что $u\neq 0$ и

$$\lambda\{a(\nabla_2 u_3,\nabla_2 v_3)+c(u,v)\}=(u_3,v_3)\quad \forall v\in V, \tag{1}$$

где

$$a(\nabla_2 u_3,\nabla_2 v_3)=\int\limits_\Omega D_M[\partial_{11}u_3\partial_{11}v_3+\partial_{11}u_3\partial_{22}v_3+\partial_{22}u_3\partial_{11}v_3+\partial_{22}u_3\partial_{22}u_3-$$
$$-(1-\upsilon)(\partial_{11}u_3\partial_{22}v_3+\partial_{22}u_3\partial_{11}v_3-\partial_{12}u_3\partial_{12}u_3)]dx,$$

$$c(u,v)=\int\limits_\Omega D_N[\varepsilon_1(u)\varepsilon_1(v)+\varepsilon_2(u)\varepsilon_2(v)+$$
$$+\nu\varepsilon_1(u)\varepsilon_2(v)+\nu\varepsilon_2(u)\varepsilon_1(v)+\tfrac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}(u)\varepsilon_{12}(v)]dx,$$

$$V=(H_0^1(\Omega))^2\times H_0^2(\Omega),$$

$\lambda=1/\rho\delta\omega^2$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$. Остальные обозначения приведены в работах [5,8].

© В. В. Вербицкий, 2000

Заметим, что задача (1) отличается от линейной задачи на собственные значения устойчивости пологих оболочек [5] лишь правой частью, причем правая часть имеет более простой вид, поэтому задача (1) обладает такими же спектральными свойствами, как и задача линейной устойчивости пологих оболочек.

Задача, для $q \in L_2(\Omega)$ найти $u \in V$, что

$$a(\nabla_2 u, \nabla_2 v) + c(u, v) = (q, v_3) \quad \forall v \in V, \tag{2}$$

имеет единственное решение, и существует такая константа $C > 0$, что

$$|u|_V \le C |q_3|_{0,\Omega}.$$

Тем самым определен линейный непрерывный оператор $T: L_2(\Omega) \to V$, если положить $Tq = u$. Как и в [5], можно показать, что задача (1) равносильна задаче на собственные значения для самосопряженного вполне непрерывного оператора T в гильбертовом пространстве V.

Также как в [5], поставим в соответствие задаче (1) дискретную задачу, построенную по схеме Германа-Джонсона СМКЭ [8]: Найти такие $(\lambda_h, m_{u_{3h}}, u_h) \in R \times M_h \times V_h$, $u_h \ne 0$, что

$$\lambda_h \{a(m_{u_{3h}}, m_{v_{3h}}) + c(u_h, v_h)\} = (u_{3h}, v_{3h}) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3}$$

Здесь дискретные пространства M_h и V_h определены следующим образом [8]:

$$M_h = \{\rho_h \in \widetilde{M}, \forall K \in T_h \ \rho_{ijh}|_K \in P_{k-1}, 1 \le i, j \le 2, \rho_{12h} = \rho_{21h}\},$$

$$V_h = [X_{h,0}^{(k)}]^3, \quad k \ge 1.$$

2. Оценки сходимости. Определим σ, σ_h и $\sigma(\varepsilon)$ следующим образом: σ – множество всех собственных значений задачи (1), σ_h – множество всех собственных значений дискретной задачи (3), $\sigma(\varepsilon) = \bigcup\limits_{\lambda \in \varpi}]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное положительное число. Пусть $\lambda \in \sigma$ – ненулевое собственное значение задачи (1) простое или кратное. Обозначим через E его собственное подпространство размерности m $(1 \le m < \infty)$ с ортонормированным базисом $\{\varphi^i\}_{i=1}^m$:

$$A(\varphi^i, \varphi^j) = a(\nabla_2 \varphi_3^i, \nabla_2 \varphi_3^j) + c(\varphi^i, \varphi^j) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le m. \tag{4}$$

Пусть $C > 0$ – такая константа, что $[\lambda - C, \lambda + C] \cap \sigma = \{\lambda\}$. Обозначим через E^h линейную оболочку всех собственных функций, соответствующих всем собственным значениям $\lambda_h \in [\lambda - C, \lambda + C]$, m_h – размерность E^h $(0 \le m_h < \infty)$, $\{\varphi_h^i\}_{i=1}^{m_h}$ – базис E^h, ортонормированный следующим образом:

$$A_h(\varphi_h^i, \varphi_h^j) = a(m_{\varphi_{3h}^i}, m_{\varphi_{3h}^j}) + c(\varphi_h^i, \varphi_h^j) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le m_h \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть для любого $q \in L_2(\Omega)$ решение задачи (2) принадлежит пространству*

$$(H_0^1(\Omega) \cap H^{k+1})^2 \times (H_0^2(\Omega) \cap H^{k+2}), k \ge 1. \tag{6}$$

Тогда для любого отличного от нуля собственного значения λ задачи (1) с собственным подпространством E, $\dim E = m$, можно указать такое $h_0 > 0$, что для любого $h < h_0$ существует ровно m собственных значений задачи (3), для которых справедлива оценка

$$|\lambda - \lambda_h| \le Ch^k \sum_{j=1}^m R^k(\varphi^j), \quad k \ge 1, \quad 1 \le i \le m. \tag{7}$$

При этом собственное подпространство E^h, соответствующее собственным *значениям* λ_h^i $(1 \le i \le m)$, *стремится к собственному подпространству* E *в следующем смысле: если* $\{\varphi_h^i\}_{i=1}^{m_h}$ – *ортонормированный в смысле* (5) *базис* E^h, *то в* E *существует базис* $\{\overline{\varphi}^i\}_{i=1}^m$ *такой, что*

$$\| \overline{\varphi}^i - \varphi_h^i \|_{1,\Omega} + \| \nabla_2 \overline{\varphi}_3^i - m_{\varphi_{3h}^i} \|_{0,\Omega} \le Ch^k \sum_{j=1}^m R^k(\varphi^j), \quad k \ge 1, \quad 1 \le i \le m, \tag{8}$$

где $R^k(\varphi^j) = |\varphi^j|_{k+1,\Omega} + |\varphi_3^j|_{k+2,\Omega}$, $C > 0$ – *константа, не зависящая от* h.

Доказательство теоремы полностью совпадает с доказательством аналогичной теоремы для задачи на собственные значения устойчивости пологих оболочек [5, теорема 4.1].

Утверждение (7) теоремы 1 можно усилить. Заметим также, что базис $\{\overline{\varphi}^i\}_{i=1}^m$ подпространства E не является ортонормированным в смысле (4). Покажем, что в подпространстве E можно выбрать ортонормированный базис $\{\widetilde{\varphi}^i\}_{i=1}^m$, для которого теорема 1 будет верна.

Теорема 2. *Пусть для любого* $q \in L_2(\Omega)$ *решение задачи* (2) *принадлежит пространству* (6). *Тогда для любого отличного от нуля собственного значения* λ *задачи* (1) *с собственным подпространством* E, $\dim E = m$, *можно указать такое* $h_0 > 0$, *что для любого* $h < h_0$ *существует ровно* m *собственных значений задачи* (3), *для которых справедлива оценка*

$$|\lambda - \lambda_h^i| \le Ch^{k+1} \sum_{j=1}^m R^k(\varphi^j), \quad k \ge 1, \quad 1 \le i \le m.$$

При этом собственное подпространство E^h, *соответствующее собственным значениям* λ_h^i $(1 \le i \le m)$, *стремится к собственному подпространству* E *в следующем смысле: если* $\{\varphi_h^i\}_{i=1}^{m_h}$ – *ортонормированный в смысле* (5) *базис* E^h, *то в* E *существует ортонормированный в смысле* (4) *базис* $\{\widetilde{\varphi}^i\}_{i=1}^m$ *такой, что*

$$\| \widetilde{\varphi}^i - \varphi_h^i \|_{1,\Omega} + \| \nabla_2 \widetilde{\varphi}_3^i - m_{\varphi_{3h}^i} \|_{0,\Omega} \le Ch^k \sum_{j=1}^m R^k(\varphi^j), \quad k \ge 1, \quad 1 \le i \le m,$$

где $C > 0$ – *константа, не зависящая от* h.

Доказательство. Определим матрицу $B = \| b_{ij} \| \, (1 \le i, j \le m)$ следующим образом:

$$b_{ij} = A(\overline{\varphi}^i, \overline{\varphi}^j) \, (1 \le i, j \le m).$$

Используя (8), получаем

$$\begin{aligned} &|b_{ij} - \delta_{ij}| = |A(\overline{\varphi}^i, \overline{\varphi}^j) - A_h(\varphi_h^i, \varphi_h^j)| = \\ &= |a(\nabla_2 \overline{\varphi}_3^i, \nabla_2 \overline{\varphi}_3^j) + c(\overline{\varphi}^i, \overline{\varphi}^j) - a(m_{\varphi_{3h}^i}, m_{\varphi_{3h}^j}) - c(\varphi_h^i, \varphi_h^j)| = \\ &= |a(\nabla_2 \overline{\varphi}_3^i, \nabla_2 \overline{\varphi}_3^j - m_{\varphi_{3h}^j}) + c(\overline{\varphi}^i, \overline{\varphi}^j - \varphi_h^j) + \\ &+ a(\nabla_2 \overline{\varphi}_3^i - m_{\varphi_{3h}^i}, m_{\varphi_{3h}^j}) + c(\overline{\varphi}^i - \varphi_h^i, \varphi_h^j)| \le Ch, \end{aligned} \tag{9}$$

где константа $C > 0$ не зависит от i, j и h, когда h достаточно мало. Поскольку матрица B симметричная и положительно определенная, то существует матрица $B^{-\frac{1}{2}} = \| c_{ij} \| \, (1 \le i, j \le m)$. Причем из (9) следует, что

$$|c_{ij} - \delta_{ij}| \le Ch, \tag{10}$$

где $C>0$ – константа. Определим теперь базис $\{\widetilde{\varphi}^i\}_{i=1}^m$ подпространства E следующим образом

$$\widetilde{\varphi}^i = \sum_{j=1}^m c_{ij}\overline{\varphi}^j, \quad 1 \le i \le m. \tag{11}$$

Этот базис уже ортонормированный в смысле (4). Действительно

$$A(\widetilde{\varphi}^i,\widetilde{\varphi}^j) = \sum_{k,l=1}^m c_{ik}c_{jl}b_{kl} = (B^{-\frac{1}{2}}BB^{-\frac{1}{2}})_{ij} = \delta_{ij}.$$

Из (10),(11) следует, что для ортонормированного базиса $\{\widetilde{\varphi}^i\}_{i=1}^m$ справедлива оценка (8) теоремы 1. Улучшим теперь оценку (7).

$$|\lambda_0 - \lambda_h^i| = |(\widetilde{\varphi}_3^i,\widetilde{\varphi}_3^i) - (\varphi_{3h}^i,\varphi_{3h}^i)| = |(\widetilde{\varphi}_3^i - \varphi_{3h}^i,\widetilde{\varphi}_3^i) + (\varphi_{3h}^i,\widetilde{\varphi}_3^i - \varphi_{3h}^i)| \le \tag{12}$$
$$\le C|\widetilde{\varphi}_3^i - \varphi_{3h}^i|_{0,\Omega}, \quad 1 \le i \le m,$$

где $C>0$ – константа не зависящая от h.

Теперь из (12) и общих теорем аппроксимации [7] следует, что

$$|\lambda - \lambda_h| \le Ch^{k+1}\sum_{j=1}^m R^k(\varphi^j), k \ge 1, 1 \le i \le m,$$

где $C>0$ – константа, не зависящая от h. Теорема доказана.

3. Вычислительный эксперимент. Рассмотрим свободно опертую только на прямоугольном контуре пологую сферическую панель радиуса R. Собственное значение λ, отвечающее наименьшей собственной частоте ω_0, вычисляется по формуле [3]

$$\lambda = \delta\rho\omega_0^2 = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2 + \frac{E\delta}{R^2},$$

где a,b – размеры панели в плане, δ – толщина оболочки.

В вычислительном эксперименте рассматривалась сферическая панель со следующими безразмерными параметрами $\frac{a}{\delta}=\frac{b}{\delta}=\frac{R}{\delta}=100$. Триангуляция области $\overline{\Omega}=[(0,1)\times(0,1)]$ характеризуется числом N треугольников вдоль стороны квадрата. Дискретная задача (3) строилась при $k=1$. В этом случае на каждом треугольнике перемещения аппроксимируются линейными функциями, а нормальные моменты к сторонам треугольника – константами. По теореме 2 сходимость собственных значений дискретной задачи (3) имеет порядок $O(h^2)$. В нашем случае $h=\frac{1}{N}$. В таблице 1 приведены результаты расчетов при различных значениях N. Рисунок 1 демонстрирует сходимость дискретной задачи.

Таблица 1.

N	4	6	8	10	12	14	16	18	20
λ_h/λ	0.8923	0.9484	0.9700	0.9805	0.9863	0.9899	0.9922	0.9939	0.9950

Заключение. В статье доказана сходимость СМКЭ в задаче на собственные значения установившихся гармонических колебаний пологой оболочки. В отличие от аналогичной задачи на собственные значения, возникающей при исследовании устойчивости пологой оболочки [5], собственные значения дискретной задачи имеют более высокий порядок сходимости ($O(h^{k+1}), k \ge 1$).

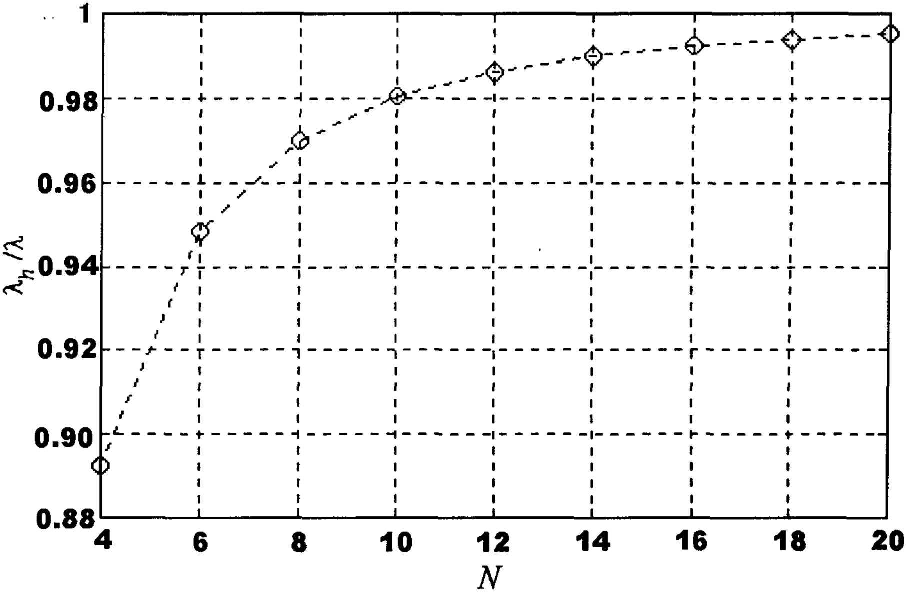

Рис. 1.

1. **Вербицкий В. В.** Смешанный метод конечных элементов в задаче на собственные значения нелинейной устойчивости пологих оболочек // Известия ВУЗ. Математика. – 1998. – № 11. – С. 22–31.
2. **Голушков В. Г., Масловская Л. В.** Смешанный метод конечных элементов в задачах теории оболочек // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – Т. 34. – № 5. – С. 748–769.
3. **Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.** Свободные колебания тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
4. **Масловская Л. В.** Неулучшаемые оценки сходимости полусмешанного метода конечных элементов для основных краевых задач теории пологих оболочек // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1990. – Т. 30. – № 4. – С. 513–532.
5. **Масловская Л. В., Вербицкий В. В.** Сходимость смешанного метода конечных элементов в задачах устойчивости пологих оболочек // Известия ВУЗ. Математика. – 1993. – № 10. – С. 21–31.
6. **Огибалов П. М.** Вопросы динамики и устойчивости оболочек. – М.: Из-во Моск. ун-та, 1963. – 419 с.
7. **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
8. **Филиппович А. П.** Анализ смешанных схем метода конечных элементов в задачах о деформации пологих оболочек // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1988. – Т. 28. – № 5. – С. 741–754.