

ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ  
КОРОБЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ ПОДКРЕПЛЕННОЙ  
ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ СТЕРЖНЕМ

Мосеев Н.Г., Попов Г.Я., Реут В.В.

(г. Одесса)

Рассмотрим коробчатую оболочку состоящую из двух полубесконечных пластин, образующих двухгранный прямой угол (см.рис.1) и имеющих различные упругие постоянные  $(E_j, \nu_j)$ . Вдоль ребра оболочка подкреплена полубесконечным упругим стержнем к торцу которого приложена произвольно ориентированная сила, проекции которой на оси координат соответственно  $Q_1, Q_2, Q_3$ .

Ввиду того, что нагрузка приложена к ребру оболочки, изгибом пластинок можно пренебречь [1], и тогда математически задача сведется к отысканию решения системы двух бигармонических уравнений (описывающих плоское напряженное состояние пластинок) и удовлетворению условий на ребре оболочки

$$x < 0, u_1 = u_2, \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xz}^{(2)}, \tilde{b}_y^{(1)} = \tilde{b}_z^{(2)} = 0 \quad (1)$$

$$x > 0, u_1 = u_2, \partial_1 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{u_1 + u_2}{2} \right) = \tau_{xy}^{(1)} - \tau_{xz}^{(2)} \quad (2)$$

$$\partial_2 (d^4/dx^4) v_1 = -\tilde{b}_y^{(1)}, \quad \partial_3 (d^4/dx^4) w_2 = \tilde{b}_z^{(2)}$$

Здесь  $u_j, v_1, w_2$  - плоские перемещения в  $j$ -пластинке в направлении осей  $x, y, z$ ,  $\tilde{b}_y^{(1)}, \tilde{b}_z^{(2)}$  - нормальные, а  $\tau_{xy}^{(1)}, \tau_{xz}^{(2)}$  - касательные напряжения,  $\partial_1$  - жесткость стержня на растяжение,  $\partial_2 = \partial_3$  - изгибные жесткости стержня.

Используя метод разрывных решений [2], относительно неизвестного вектора контактных напряжений между оболочкой и стержнем  $P(x) = (P_1(x), P_2(x), P_3(x))^*$ ,  $x > 0$  (\* - транспонирование),  $P_1 = \tau_{xy}^{(1)} - \tau_{xz}^{(2)}$ ,  $P_2 = -\tilde{b}_y^{(1)}$ ,  $P_3 = \tilde{b}_z^{(2)}$  задача сводится к следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$P(x) + \partial \left( \frac{d}{dx} \right) \int_0^{\infty} K(x-\xi) P(\xi) d\xi = 0, x > 0$$

$$\partial(u) = \text{diag} \{ -\partial_1 u^2, \partial_2 u^4, \partial_2 u^4 \}$$

$$K(x) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x|} A_0 + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x A_1$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & \gamma_1 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_2 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\beta_j = 1 - \nu_j, \quad 2\alpha = \beta_1 \beta_2, \quad \gamma_j = 2 + \frac{1}{2} S_j (4 - \beta_j^2), \quad S_1^{-1} = E_1 / E_2 = S_2$$

при следующих дополнительных условиях (условия равновесия стержня)

$$\int_0^{+\infty} P_j(x) dx = -Q_j, \quad j=1,2,3; \quad \int_0^{\infty} x P_j(x) dx = 0, \quad j=2,3 \quad (4)$$

Используя аппарат преобразования Фурье обобщенных функций, система (3) сводится к следующей краевой задаче Римана относительно трех пар функций

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= G(t) \Phi^-(t), \quad -\infty < t < +\infty \\ G(t) &= A_0 g(t, A(t)), \quad g(t, u) = |t|^3 + u, \\ A(t) &= A_0^{-1} [(it)^3 A_1 + \operatorname{diag}\{\lambda t^2, 1, 1\}], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\lambda = \mathfrak{D}_1^{-1} (E_1 + E_2) C, \quad C^3 = \mathfrak{D}_2 (E_1 + E_2)^{-1},$$

$$\Phi^-(z) = \int_0^{\infty} \rho(c\tau) e^{-iz\tau} d\tau$$

в которой вектор-функции  $\Phi^{\pm}(z)$  аналитичны соответственно в верхней (нижней) полуплоскостях, причем  $\Phi^{\pm}(z) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty$ ,  $\Phi^+(z)$  - полиномиально-ограничена на  $\infty$ , и  $(1, 0, 0)$

$$\Phi^+(z) = O(z^2), \quad z \rightarrow 0.$$

Таким образом задача свелась к факторизации

$$g(t, A(t)) = X^+(t) [X^-(t)]^{-1}, \quad -\infty < t < +\infty \quad (6)$$

матрицы - функции  $g(t, A(t))$ .

Построение факторизации матрицы  $g(t, A(t))$  существенно определяется [3] характеристическим многочленом матрицы

$$\begin{aligned} \varphi(z, w) = \det(wI - A(z)) &= \prod_{k=1}^3 (w - w_k(z)) = w^3 - b_1(z)w^2 \\ &+ b_2(z)w - b_3(z); \quad S_0 b_1(z) = S_0 \lambda z^2 + 2(\gamma_1 + \gamma_2), \quad S_0 = \gamma_1 \gamma_2 - \\ &- \alpha^2, \quad S_0 b_2(z) = 2 + \lambda(\gamma_1 + \gamma_2)z^2 - (\beta_1^2 \gamma_2 + \beta_2^2 \gamma_1 - \\ &- \beta_1^2 \beta_2^2)z^6, \quad S_0 b_3(z) = \lambda z^2 - (\beta_1^2 \gamma_2 + \beta_2^2 \gamma_1)z^6 \end{aligned} \quad (7)$$

и дискриминантом  $\Delta(z) = b_1^2(z)b_2^2(z) - 4b_2^3(z) + 18b_1(z)b_2(z)b_3(z) - 27b_3^2(z)$  уравнения  $\varphi(z, w) = 0$ .

В наиболее общей ситуации (исключая ряд специальных соотношений между параметрами  $E_1, E_2, V_1, V_2, \partial_1, \partial_2$ ) полином  $\varphi(z, w)$  неприводим в поле рациональных функций и полином  $\Delta(z)$  не имеет кратных корней (дискриминант уравнения  $\Delta(z) = 0$  не равен нулю). В дальнейшем изложении остановимся на указанной ситуации, отметив только, что при упомянутых специальных соотношениях между параметрами задачи построение факторизации (6) осуществляется проще, чем в общем случае.

Через  $\mathbb{R}$  обозначим трехлистную риманову поверхность, заданную неприводимым алгебраическим уравнением  $\varphi(z, w) = 0$ . В соответствии с принятыми в [4, 5] обозначениями точку поверхности  $\mathbb{R}$  с комплексной координатой  $C$ , расположенную на  $j$ -том листе, будем идентифицировать парой  $(C, w_j(C))$ . Через  $\Gamma$  обозначим следующий контур поверхности  $\mathbb{R}$   $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \Pi \cup \Pi_j = \{(t, w_j(t)), -\infty < t < +\infty\}, j = 1, 2, 3$  с направлением обхода на каждом из его составляющих  $\Gamma_j$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

В качестве фундаментального базиса [5, 6] кольца целых элементов поля алгебраических функций, порожденного неприводимым алгебраическим уравнением  $\varphi(z, w) = 0$  можно взять базис

$$\lambda_1 \equiv 1, \quad \lambda_2(z, w) = w - \frac{1}{3}b_1(z), \quad \lambda_3(z, w) = w^2 - \frac{2b_2 - b_1^2}{3} \quad (8)$$

дополнительным [5, 6] к которому является следующий

$$\mu_1 = \frac{1}{3}, \quad \mu_2(z, w) = \frac{w - b_1(z)}{3w^2 - 2b_1(z)w + b_2(z)},$$

$$\mu_3(z, w) = [3w^2 - 2b_1(z)w + b_2(z)]^{-1} \quad (9)$$

Целые порядки  $[5, 6]$  на  $\infty$  для базиса (6) соответственно равны  $\Gamma_2 = 3, \Gamma_3 = 6$ . Так как  $\Gamma_2 + \Gamma_3 = 9 = \text{пор. } \infty \sqrt{\Delta(z)}$  и элементы матрицы  $\{\mu_k(z, w_j(z))\}_{k, j=1, 2, 3}$  имеют не более, чем интегрируемые особенности, то в соответствии с [5] базисы (8), (9) порождают аналог ядра типа Коши [4] поверхности  $\mathbb{R}$ :

$$(-z + \tau)^{-1} \Pi(z, w; \tau, \xi) d\tau, \\ \Pi(z, w; \tau, \xi) = \sum_{j=1}^3 \lambda_j(z, w) \mu_j(\tau, \xi) \quad (10)$$

и базис абелевых дифференциалов I рода  $[4, 6]$

$$z^j \mu_k(z, w), j = \overline{0, \Gamma_k - 2}, k = 2, 3 \quad (11)$$

а род  $[6]$  поверхности  $\mathbb{R}$  равен  $\rho = (\Gamma_2 - 1) + (\Gamma_3 - 1) = 7$

Согласно [3], фундаментальная матрица решений (ф.м.р.) [8], факторизующая (6), строится следующим образом

$$\chi(z) = \sum_{k=1}^3 F(z, w_k(z)) \ell(z, w_k(z); A(z)) \quad (12) \\ \ell(z, w; u) = \frac{(b_2(z) - b_1(z)w + w^2) + u(w - b_1) + u^2}{3w^2 - 2b_1(z)w + b_2(z)}$$

где  $F(z, w)$  - решение следующей краевой задачи Римана на поверхности  $\mathbb{R}$

$$F^+(\tau, \xi) = (1 - \tau^3 + \xi) F^-(\tau, \xi), (\tau, \xi) \in \Gamma \quad (13)$$

В соответствии с [4] решение задачи (13) можно построить следующим образом

$$F(z, w) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Pi(z, w; \tau, \xi)}{\tau - z} \ln(1 - \tau^3 + \xi) d\tau + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^7 \int_{(a_0, d_0)}^{(a_k, d_k)} \frac{\Pi(z, w; \tau, \xi)}{\tau - z} d\tau \right\} \quad (14)$$

где точка поверхности  $(a_0, d_0)$  может быть выбрана произ-

вольны, а точки поверхности  $(a_k, d_k), k=1, 2$  находятся из следующей системы уравнений

$$\sum_{k=1}^2 \int_{(a_k, d_k)}^{(a_0, d_0)} z^j \mu_m(z, \bar{z}) dz = -\frac{1}{2\sqrt{i}\Gamma} \int \ln(|z|^3 + z + \bar{z}) z^j \mu_m(z, \bar{z}) dz, \quad j = 0, \overline{1, m-2}, \quad m = 2, 3,$$

которая сводится к проблеме обращения Якоби [4,6]. Последняя в свою очередь с помощью соответствующей  $\theta$  - функции Римана сводится [4] к нахождению корней полинома седьмой степени.

По ф.м.р. (12) строится с помощью известной процедуры [7,8] каноническая матрица решений (к.м.р.) задачи (3) в рассматриваемом классе (частные индексы соответственно равны  $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 2, \kappa_3 = 2$ ). Пять произвольных постоянных, содержащихся в общем решении системы (3), однозначно определяются условиями равновесия (4).

Анализ интегрального представления решения показывает, что при  $\chi \rightarrow 0$  контактные напряжения на ребре ведут себя следующим образом

$$p(x) = O(x^{-1/2 \pm i\beta}), \quad x \rightarrow 0$$

$$\beta = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \ln \frac{1 + \sqrt{\gamma}}{1 - \sqrt{\gamma}}, \quad 2\gamma = \frac{\beta_1^2 [4 - \beta_2^2] E_2^{-1} + \beta_2^2 [4 - \beta_1^2] E_1^{-1}}{[4 - \beta_2^2] E_2^{-1} + [4 - \beta_1^2] E_1^{-1}},$$

$$\beta_j = 1 - \nu_j, \quad j = 1, 2.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П.Ф. Теория упругости - М.: Гостехиздат, 1937.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, трещин, включений и подкреплений. - М., Наука, 1982. - С. 44-47.
3. Моисеев Н.Г. - ДАН СССР, 1989. т. 305, № I. - С.44-47.

4. Зверович Э.И. - УМН, 1971, т.21, № 1. С.113-179.
5. Круглов В.Е. В сб. Теория функций комплексного переменного и краевые задачи, Чебоксары, 1974, вып. 2, - С. 78-87.
6. Чеботарев Н.Г. Теория алгебраических функций. М.: Л.: Гостехиздат, 1948, С. 396.
7. Мухомелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, 1968.
8. Гахов Ф.Д. УМН, 1952. Т.7, № 4. С. 3-54.

