ISSN 2079–1836
2012, вип. 19

УДК 539.3

Н. Д. Вайсфельд, д-р физ.-мат. наук, Г. Я. Попов, д-р физ.-мат. наук, В. В. Реут, канд. физ.-мат. наук

ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО УПРУГОГО КЛИНА

Рассмотрена вторая основная задача для бесконечного упругого клина. Применение интегрального преобразования Меллина приводит к векторной краевой задаче в пространстве трансформант, которая решается методом матричного дифференциального исчисления. Установлен порядок особенности напряжений в острие клина и проведено его сравнение с порядком особенности напряжений, полученных по методу Вильямса. Установлен критерий применимости последнего в случае неоднородных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *защемленный клин, метод Вильямса, интегральное преобразование Меллина, векторная краевая задача.*

Введение. Клиновидные структуры являются часто используемыми технологическими конструкциями, что обуславливает большое количество работ, посвященных изучению их напряженного состояния. Плоская задача теории упругости для бесконечного клина исследована многими учеными [3, 4, 6], реже рассматривались задачи для клина с концентраторами напряжений [2]. Целью данной работы являлось сравнение порядка особенности напряжений у острия клина, полученного двумя способами: из точного решения задачи и с помощью метода Вильямса [7], позволяющего оценить порядок особенности напряжений при отсутствии воздействия объемных сил. Представляло интерес выяснить критерий применимости метода Вильямса в случае неоднородных дифференциальных уравнений задачи.

Постановка задачи. Рассматривается упругий (коэффициент Пуассона μ, модуль сдвига G) бесконечный клин $0 < r < \infty, 0 < \phi < \alpha$, грани которого защемлены

$$u_r(r,\phi)\Big|_{\phi = 0,\alpha} = 0,\ u_\phi(r,\phi)\Big|_{\phi = 0,\alpha} = 0\,. \qquad (1)$$

На клин действует объемная нагрузка интенсивности $q(r,\phi)$, направленная вдоль радиуса. Требуется определить напряженное состояние клина и установить порядок особенности напряжений в острие клина.

Сведение проблемы к векторной краевой задаче. К уравнениям равновесия

$$r^2\nabla^2 u(r,\phi)-u(r,\phi)-2v^{\bullet}(r,\phi)+r^2\mu_0\left(\frac{(ru)'}{r}+\frac{v^{\bullet}}{r}\right)'+\frac{r^2 q(r,\phi)}{G}=0;$$

$$r^2\nabla^2 v(r,\phi)-v(r,\phi)+2u^{\bullet}(r,\phi)+r\mu_0\left(\frac{(ru)'}{r}+\frac{v^{\bullet}}{r}\right)^{\bullet}=0, \qquad (2)$$

где $u(r,\phi)=u_r(r,\phi)$; $v(r,\phi)=u_\phi(r,\phi)$; $\mu_0=(1-2\mu)^{-1}$; $\nabla^2 f=\frac{(rf')'}{r}+\frac{f^{\bullet\bullet}}{r^2}$, применяется прямое преобразование Меллина [1]. В пространстве трансформант запишем краевую задачу в виде

$$u_s''(\phi)-\frac{2(\kappa+s)v_s'(r,\phi)}{\kappa-1}+\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\left(s^2-1\right)u_s(\phi)=q_s(\phi);$$

$$v_s''(\phi)+\frac{2(\kappa-s)u_s'(\phi)}{\kappa+1}+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\left(s^2-1\right)v_s(\phi)=0; \qquad (3)$$

$$u_s(0)=0,\ v_s(0)=0, u_s(\alpha)=0,\ v_s(\alpha)=0\ , \qquad (4)$$

где $\kappa=2/\mu_0+1$; $\begin{bmatrix}u_s(\phi)\\ v_s(\phi)\end{bmatrix}=\int\limits_0^\infty\begin{bmatrix}u(r,\phi)\\ v(r,\phi)\end{bmatrix}r^{s-1}dr$; $q_s(\phi)=-\frac{1}{G}\int\limits_0^\infty q(r,\phi)\, r^{s+1}dr$. Введем в рассмотрение матрицы и вектора

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}0 & \frac{-2(\kappa+s)}{\kappa-1}\\ \frac{2(\kappa-s)}{\kappa+1} & 1\end{pmatrix}, Q=\left(s^2-1\right)\begin{pmatrix}\frac{\kappa+1}{\kappa-1} & 0\\ 0 & \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\end{pmatrix};$$

$$\vec{y}=\begin{pmatrix}u_s(\phi)\\ v_s(\phi)\end{pmatrix}, \vec{f}=\begin{pmatrix}q_s(\phi)\\ 0\end{pmatrix}.$$

С их помощью система дифференциальных уравнений (3) запишется в виде векторного уравнения

$$L_2\vec{y}=\vec{f}\ , \qquad (5)$$

где $L_2\,\vec{y}=I\,\vec{y}''+P\,\vec{y}'+Q\,\vec{y}$.

Решение векторной задачи. С целью найти решение векторного уравнения (5) решим сначала однородное матричное уравнение $L_2 Y=0$. Для этого решение будем строить в виде $Y = e^{\lambda\phi} I$ по схеме, изложенной в [5]. Это приводит к вычислению интеграла

$$Y = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{\lambda\phi} M^{-1}(\lambda)\,d\lambda\,,$$

где контур C охватывает особые точки подынтегрального выражения

$$M^{-1}(\lambda) = \frac{M^c(\lambda)}{\det M(\lambda)}, \qquad \det M(\lambda) = \left(\lambda^2 + (s-1)^2\right)\left(\lambda^2 + (s+1)^2\right)\,,$$

$M^c(\lambda)$ – союзная матрица к характеристической матрице

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \left(s^2 - 1\right)\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1} & \dfrac{-2\lambda(\kappa+s)}{\kappa-1} \\ \dfrac{2\lambda(\kappa-s)}{\kappa+1} & \lambda^2 + \left(s^2-1\right)\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1} \end{pmatrix}.$$

Окончательно, используя теорему о вычетах, выпишем матричные решения однородного матричного уравнения:

$$Y_1(\phi, s) = \frac{1}{\pi i}\begin{pmatrix} \dfrac{(\kappa-s)\sin(s-1)}{4s(\kappa+1)} & \dfrac{(\kappa+s)\cos(s-1)}{4s(\kappa-1)} \\ \dfrac{(s-\kappa)\cos(s-1)}{4s(\kappa+1)} & \dfrac{(\kappa+s)\sin(s-1)}{4s(\kappa-1)} \end{pmatrix};$$

$$Y_2(\phi, s) = \frac{1}{\pi i}\begin{pmatrix} \dfrac{(\kappa+s)\sin(s+1)}{4s(\kappa+1)} & -\dfrac{(\kappa+s)\cos(s+1)}{4s(\kappa-1)} \\ \dfrac{(\kappa-s)\cos(s+1)}{4s(\kappa+1)} & \dfrac{(\kappa-s)\sin(s+1)}{4s(\kappa-1)} \end{pmatrix}.$$

Общее решение векторного уравнения будет построено, если умножить построенные матрицы на векторы-константы:

$$\vec{y}(\phi) = Y_1(\phi, s)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + Y_2(\phi, s)\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Для отыскания частного решения неоднородного векторного уравнения построим фундаментальную матицу [6], применив интегральное преобразование Фурье к векторному уравнению (5)

$$\Phi(\phi, \tilde{\phi}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(\phi-\tilde{\phi})} M^{-1}(i\lambda)\,d\lambda\,. \qquad (7)$$

Учитывая теорему о вычетах и выполнив условия леммы Жордана, в каждом из треугольников $\phi < \tilde{\phi}$ и $\phi > \tilde{\phi}$ получим конкретный вид фундаментальной матрицы. Общее решение векторного уравнения запишется окончательно в виде

$$\vec{y}(\phi) = Y_1(\phi, s)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + Y_2(\phi, s)\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} + \int_0^{\alpha} \Phi(\phi, \tilde{\phi})\vec{f}(\tilde{\phi})d\tilde{\phi}\ . \tag{8}$$

Удовлетворим краевым условиям (4) для того, чтобы отыскать неизвестные постоянные, входящие в решение (8). Для этого решим систему четырёх уравнений, откуда получим

$$C_i = \frac{\gamma_i(s, \kappa)}{\Delta(s, \kappa)}\ \ (i = \overline{1,4}\ );$$

$$\Delta(s, \kappa) = \left(\kappa^2 - s\right)\cos \pi s - \kappa^2\ . \tag{9}$$

В пространстве трансформант Меллина получены формулы трансформанты смещений:

$$u_s(\phi) = \left(\frac{Y_1^{1,1}(\phi, s)\gamma_1(s,\kappa) + Y_1^{1,2}(\phi, s)\gamma_2(s,\kappa) + Y_2^{1,1}(\phi, s)\gamma_3(s,\kappa) + Y_2^{1,2}(\phi)\gamma_4(s,\kappa)}{\Lambda(s,\kappa)}\right) +$$

$$+ \int_0^{\alpha} \Phi^{1,1}(\phi, \tilde{\phi})q_s\left(\tilde{\phi}\right)d\tilde{\phi};$$

$$v_s(\phi) = \left(\frac{Y_1^{2,1}(\phi, s)\gamma_1(s,\kappa) + Y_1^{2,2}(\phi, s)\gamma_2(s,\kappa) + Y_2^{2,1}(\phi, s)\gamma_3(s,\kappa) + Y_2^{2,2}(\phi)\gamma_4(s,\kappa)}{\Lambda(s,\kappa)}\right) +$$

$$+ \int_0^{\alpha} \Phi^{2,1}(\phi, \tilde{\phi})q_s\left(\tilde{\phi}\right)d\tilde{\phi}\ . \tag{10}$$

К формулам (10) применяется обратное преобразование Меллина, после чего определяются напряжения $\sigma_r(r,\phi), \sigma_\phi(r,\phi), \tau_{r\phi}(r,\phi)$. Для обращения преобразования Меллина необходимо отыскать корни трансцендентного уравнения

$$\Delta(s, \kappa) = 0 \tag{11}$$

и выбрать тот из них, который даст наибольшую сингулярность. Этот корень и будет определять порядок особенности решения.

Определение порядка особенности решения по Вильямсу. Согласно методу Вильямса для определения порядка особенности следует рассмотреть однородную систему уравнений равновесия (2) с однородными краевыми условиями [7]. Представим смещения в виде

$$u_r(r,\phi) = r^{\lambda} u(\phi), \;\; u_{\phi}(r,\phi) = r^{\lambda} v(\phi) \, . \tag{12}$$

Подставим представления (12) в систему (2), что приведет к получению однородной системы уравнений:

$$u''(\phi) - \frac{2(\kappa+\lambda)v'(\phi)}{\kappa-1} + \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\left(\lambda^2-1\right)u(\phi) = 0\,;$$

$$v''(\phi) + \frac{2(\kappa-\lambda)u'(\phi)}{\kappa+1} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\left(\lambda^2-1\right)v(\phi) = 0\,; \tag{13}$$

$$u(0)=0,\; v(0)=0,\, u(\alpha)=0,\, v(\alpha)=0\,. \tag{14}$$

Согласно приведенной выше схемы, используя подход на основе матричного дифференциального исчисления, получим решение однородной задачи, записанной в виде

$$\begin{aligned} u(\phi) &= Y_1^{1,1}(\phi,\lambda)C_1 + Y_1^{1,2}(\phi,\lambda)C_2 + Y_2^{1,1}(\phi,\lambda)C_3 + Y_2^{1,2}(\phi,\lambda)C_4; \\ v(\phi) &= Y_1^{2,1}(\phi,\lambda)C_1 + Y_1^{2,2}(\phi,\lambda)C_2 + Y_2^{2,1}(\phi,\lambda)C_3 + Y_2^{2,2}(\phi,\lambda)C_4. \end{aligned} \tag{15}$$

Удовлетворив краевым условиям (14), получим однородную систему уравнений относительно неизвестных $C_i, i=\overline{1,4}$. Для того чтобы решение такой системы существовало, требуется, чтобы ее определитель был равен нулю. Это приводит к решению уравнения вида $\Delta(\lambda,\kappa)=0$.

Анализ двух подходов к выявлению порядка особенности в острие. Как видно из результатов, полученных непосредственным решением задачи и методом Вильямса, на первый взгляд, порядок особенности напряжений будет определяться корнями одного и того же уравнения (а именно тем корнем, который вносит наиболее высокую степень сингулярности). Более подробный анализ решения (10) показывает, что последнее слагаемое в формулах (10) в некоторых случаях может вносить сингулярность более сильную, чем корень уравнения (11). Эту более сильную сингулярность несет трансформанта объемных сил $q_s(\phi)$, и, следовательно, применимость метода Вильямса для определения порядка особенности напряжений зависит от характера приложенной нагрузки.

Продемонстрируем это на примере. Для расчетов выбран стальной клин с углом раствора равным $\alpha=\pi/2$, загруженный сосредоточенной силой величины P, направленной вдоль радиуса. Интенсивность объемной нагрузки будет иметь вид $q(r,\phi) = r^{-1}P\delta(r-\rho)\delta(\phi-\pi/4)$, $\delta(z)$ – дельта-функция, тогда последнее слагаемое в формулах (10) примет вид

$$u_s(\phi)=\left(\frac{Y_1^{1,1}(\phi,s)\gamma_1(s,\kappa)+Y_1^{1,2}(\phi,s)\gamma_2(s,\kappa)+Y_2^{1,1}(\phi,s)\gamma_3(s,\kappa)+Y_2^{1,2}(\phi)\gamma_4(s,\kappa)}{\Lambda(s,\kappa)}\right)+$$

$$+\frac{(\kappa+s)P\rho^{s+1}e^{(s+1)\phi/2}}{4\pi^2 s(\kappa+1)G};$$

$$v_s(\phi)=\left(\frac{Y_1^{2,1}(\phi,s)\gamma_1(s,\kappa)+Y_1^{2,2}(\phi,s)\gamma_2(s,\kappa)+Y_2^{2,1}(\phi,s)\gamma_3(s,\kappa)+Y_2^{2,2}(\phi)\gamma_4(s,\kappa)}{\Lambda(s,\kappa)}\right)+$$

$$+\frac{(s-\kappa)P\rho^{s+1}e^{(s+1)\phi/2}}{4\pi^2 s(\kappa-1)G}.$$

Корень уравнения (11), который несет наибольшую сингулярность при этом равен $s^*=1,25643$, т. е. особенность напряжений примерно равна $-1/4$. Этот результат совпадает со значением порядка особенности напряжений, полученной по методу Вильямса. В этом случае неоднородность системы дифференциальных уравнений (20) не оказала влияния на значение величины особенности, рассчитанной по обоим методам.

Зададим теперь объемную нагрузку в виде

$$q(r,\phi)=\begin{cases} r^{-\omega}p(\phi), 0<r<1 \\ 0, \qquad 1<r<\infty \end{cases}.$$

(Значение ω выбирается так, чтобы обеспечить интегрируемость решения в нуле.) Трансформанта, согласно [1], имеет вид $q_s(\phi)=p(\phi)/(s-\omega)$ Как видно из анализа последнего слагаемого формул (10), в этом случае, если $\omega>s^*$ (например $\omega=0,33333$), то значение ω будет задавать порядок сингулярности напряжений, тогда как метод Вильямса определяет как наибольшую сингулярность значение s^*.

Выводы. Таким образом, объемные силы с интегрируемой особенностью в нуле определяют характер поведения неоднородной части системы дифференциальных уравнений. В случае степенной особенности может оказаться, что особенность напряжений от такой нагрузки будет сильнее, чем особенность, определяемая методом Вильямса. Потому применимость метода Вильямса в случае неоднородной системы дифференциальных уравнений ограничена характером приложенной нагрузки, и определение порядка особенности нуждается в дополнительном исследовании.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Бейтмен Г.*** Таблицы интегральных преобразований / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1966. – 295 с.

2. ***Васільєв К. В.*** Застосування методу прямого вирізування до розв'язування задачі поздовжнього зсуву клина з тонкими неоднорідностями довільної орієнтації / К. В. Васільєв, Г. Т. Сулим // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 3. – С. 117–126.

3. ***Иванов Э. Г.*** Основные задачи терии упругости для составного клина: 042002044 33 дис. … канд. физ.-мат. наук: Э. Г. Иванов. – Чебоксары, 2009. – 189 с.

4. ***Матвеев Г. А***. Смешанная задача теории упругости для клина: –дис. … канд. физ.-мат. наук: Г. А. Матвеев. – Тула, 1984. – 138 с.

5. ***Попов Г. Я.*** Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач.: Монограф./ Г. Я. Попов, С. А. Абдыманапов, В. В. Ефимов. – Алматы: Руан, 1999. – 138 с.

6. ***Уфлянд Я. С.*** Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – М.: Изд. АН СССР, 1963. – 367 с.

7. ***Williams M.*** Stress singularities resulting from various conditions in angular corners of plate and extensions / M. Williams // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – Vol. 19. – N. 4, 1952. – P. 526–528.

Одесский национальный университет
им. И. И. Мечникова,
Одесса, Украина

Поступила в редколлегию 02.03.2012

Н. Д. Вайсфельд, д-р фіз.-мат. наук, Г. Я. Попов, д-р фіз.-мат. наук,
В. В. Реут, канд. фіз.-мат. наук

ДРУГА ОСНОВНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПРУЖНОГО КЛИНА

Розглянуто другу основну задачу для нескінченного пружного клина. Застосування інтегрального перетворення Мелліна приводить до векторної крайової задачі в просторі трансформант, яка розв'язується за методом матричного диференціального числення. Встановлено порядок особливості напружень у вістря та проведено його порівняння з порядком особливості напружень за методом Вільямса. Встановлено критерій застосування останнього у випадку неоднорідних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: *защемлений клин, метод Вільямса, інтегральне перетворення Мелліна, векторна крайова задача.*

N. D. Vaysfel'd, Professor, G. Ya. Popov, Professor,
V. V. Reut, Associate Professor

SECOND MAIN PROBLEM FOR THE INFINITY ELASTIC WEDGE

The second main elasticity problem for the infinite elastic wedge is considered. The application of Mellin's integral transformation leads to the vector boundary problem in the transforms' space. It is solved by the matrix differential calculus' method. The order of the singularity in an wedge's edge is established and its comparison with the singularities order received by Williams's method is lead. The applicability criterion of the last in the case of the inhomogeneous differential equations is established.

Keywords: *fixed wedge, Williams's method, Mellin's integral transformation, vector boundary problem.*