Журнал обчисл. та прикл. матем. J. Num. Appl. Math.
№ 3 (102) 2010, стор. 103–109 № 3 (102) 2010, pp. 103–109

УДК 517.977.58; 517.977.54

ДИСКРЕТНИЙ ВАРІАНТ МЕТОДУ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ЗАДАЧІ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

В. В. Пічкур, Є. М. Страхов

Резюме. В роботі обгрунтовано принцип оптимальності Белмана для задачі структурно–параметричної оптимізації дискретної динамічної системи з фіксованими моментами перемикання. Для цієї задачі одержано дискретне рівняння Белмана. Створено чисельний метод для задачі оптимізації лінійної дискретної системи з квадратичним термінальним функціоналом в класі структурних керувань.

Вступ

При оптимізації складних технічних систем функції керування, як правило, вибираються у структурно–параметричній формі. В праці [2] одержано обчислювальні методи, що базуються на побудові градієнтних процедур, виходячи з варіаційного методу. Важливим випадком структурного представлення керування є випадок релейних керувань, або, більш широко, керувань, що вибираються з дискретної множини. В [4] обгрунтовано алгоритм, який використовує структуризацію фазового простору, при цьому керування обирається в класі кусково–постійних. В статтях [3, 5] пропонуються методи апроксимації керувань у випадку обмежень на час дії керування та кількість точок перемикань. Робота [1] обгрунтовує принцип оптимальності Белмана для задачі вибору оптимальної структури, в ній одержано рівняння Белмана в інтегральній та диференціальній формах. Втім, метод динамічного програмування для задач структурно–параметричної оптимізації досліджений не в достатній мірі. Відкритими залишаються ряд питань, зокрема і вибір керування в структурах, що містять фазову змінну.

У статті метод динамічного програмування застосовується для задачі структурно–параметричної оптимізації дискретної системи керування з фіксованими моментами перемикання. Доведено принцип оптимальності і обгрунтовано різницеве рівняння Белмана. Запропонований чисельний алгоритм розв'язування у випадку лінійної системи з квадратичним термінальним критерієм якості.

1. Принцип оптимальності

Розглянемо задачу оптимального керування

$$J\left(x,\,u\right)=\sum_{k=0}^{N-1}g_k\left(x\left(k\right),\,u\left(k\right)\right)+\Phi\left(x\left(N\right)\right)\;\rightarrow\;\inf \tag{1}$$

при умовах

$$x\left(k+1\right)=f_k\left(x\left(k\right),\,u\left(k\right)\right),\;k=0,1,\,...\,N-1. \tag{2}$$

Тут $x\left(k\right)\in X_k,\;k=0,\,1,\,...\,,\,N$ — вектор фазових координат розмірності n, $X_k\subseteq\mathbb{R}^n$ — замкнена множина фазових обмежень в момент $k=0,1,\,...\,N$, $u\left(k\right)\in U_k$, $k=0,\,1,\,...\,,\,N-1$ — вектор керування розмірності m, $U_k\subseteq\mathbb{R}^m$ — замкнена множина обмежень на керування в момент $k=0,\,1,\,...\,,\,N-1$, $g_k\left(x,\,u\right)$, $\Phi\left(x\right)$ — неперервні функції, $f_k\left(x,\,u\right)$ — неперервна вектор–функція розмірності n, $k=0,\,1,\,...\,,\,N-1$.

Нехай керування в задачі (1)–(2) задано в структурній формі

$$u\left(k\right)=\Psi_k\left(b_k,x\right),\;k=0,\,1,\,...\,,\,N-1, \tag{3}$$

де функції $\Psi_k\left(b_k,x\right)$ є неперервно диференційованими за $b_k\in M_k$ і неперервними за x, $M_k\subset\mathbb{R}^{i_k}$, $k=0,\,1,\,...\,,\,N-1$, i_k — натуральні числа. Задача (1)–(2) є задачею структурно–параметричної оптимізації з керуванням, заданим в структурному класі (3).

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(3) існує, $u^*\left(k\right)$, $k=0,\,1,\,...\,,\,N-1$ — оптимальне керування, $x^*\left(k\right)$, $k=0,\,1,\,...\,,\,N$ — оптимальна траєкторія. Розглянемо допоміжну задачу. Зафіксуємо $s\in\{1,\,2,\,...\,,\,N-1\}$. Задача полягає в тому, щоб мінімізувати функціонал

$$J_s\left(x,\,u\right)=\sum_{k=s}^{N-1}g_k\left(x\left(k\right),\,u\left(k\right)\right)+\Phi\left(x\left(N\right)\right) \tag{4}$$

при умовах

$$x\left(k+1\right)=f_k\left(x\left(k\right),\,u\left(k\right)\right),\;k=s,\,s+1,\,...\,,\,N-1, \tag{5}$$

$$x\left(s\right)=x^*\left(s\right), \tag{6}$$

$$u\left(k\right)=\Psi_k\left(b_k,x\right),\;k=s,\,s+1,\,...\,,\,N-1. \tag{7}$$

При цьому виконуються включення $x\left(k\right)\in X_k$, $k=s,\,s+1,\,...\,,\,N$, $u\left(k\right)\in U_k$, $k=s,\,s+1,\,...\,,\,N-1$. Має місце така теорема.

Теорема 1 (принцип оптимальності Белмана)**.** *Якщо пара* $\left(\left\{\tilde{b}_k\right\},\,\{\tilde{x}\left(k\right)\}\right)$ *є розв'язком задачі* (4)–(7)*, то* $\left(\left\{\tilde{b}_k\right\},\,\{\tilde{x}\left(k\right)\}\right)=\left(\{b_k^*\},\,\{x^*\left(k\right)\}\right)$ *для* $k=s,\,s+1,\,...\,,\,N$.

Доведення. Припустимо, що існує номер $k\in\{s,\,s+1,\,...,\,N\}$ такий, що $\left(\tilde{b}_k,\,\tilde{x}\left(k\right)\right)\neq\left(b_k^*,\,x^*\left(k\right)\right)$. Тоді

$$J_s\left(\tilde{x},\,\tilde{u}\right)<J_s\left(x^*,\,u^*\right).$$

Побудуємо керування

$$\upsilon\left(k\right)=\begin{cases}\Psi_k\left(b_k^*,x\right),\;k=0,\,1,\,...\,,\,s-1,\\ \Psi_k\left(\tilde{b}_k,x\right),\;k=s,\,s+1,\,...\,,\,N-1.\end{cases}$$

Тоді відповідна траєкторія матиме вигляд

$$y(k) = \begin{cases} x^*(k), \; k = 0, 1, \dots, s-1, \\ \tilde{x}(k), \; k = s, s+1, \dots, N. \end{cases}$$

Позначимо $\Psi_k(b_k^*) = \Psi_k(b_k^*, x^*(k))$, $\Psi_k\left(\tilde{b}_k\right) = \Psi_k\left(\tilde{b}_k, \tilde{x}(k)\right)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Таким чином,

$$J(y, v) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k(y(k), v(k)) + \Phi(y(N)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{s-1} g_k(x^*(k), \Psi_k(b_k^*)) + \sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(\tilde{x}(k), \Psi_k\left(\tilde{b}_k\right)\right) + \Phi(\tilde{x}(N)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{s-1} g_k(x^*(k), \Psi_k(b_k^*)) + J_s(\tilde{x}, \tilde{u}) <$$

$$< \sum_{k=0}^{s-1} g_k(x^*(k), \Psi_k(b_k^*)) + J_s(x^*, u^*) = J(x^*, u^*).$$

Отже, отримали співвідношення $J(y, v) < J(x^*, u^*)$, а це означає, що керування u^* не є оптимальним. Одержане протиріччя доводить теорему. □

2. Дискретне рівняння Белмана

Розглянемо задачу (1)–(2) з керуванням, заданим у структурному класі (3). Зафіксуємо $s \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ та позначимо

$$B_s(z) = \min_{b_k} \left\{ \sum_{k=s}^{N-1} g_k(x(k), \Psi_k(b_k, x(k))) + \Phi(x(N)) \right\} \tag{8}$$

за умов, що

$$x(k+1) = f_k(x(k), \Psi_k(b_k, x(k))), \; k = s, s+1, \dots, N-1, \tag{9}$$

$$x(s) = z \tag{10}$$

і мають місце включення $x(k) \in X_k$, $k = s, s+1, \dots, N$ та $u(k) \in U_k$, $k = s, s+1, \dots, N-1$. Функція (8) називається функцією Белмана для задачі (1)–(3). З цього означення випливає, що $B_s(z) = \min\limits_{b_k} J_s(x, u)$.

Нехай пара $(\{b_k^*\}, \{x^*(k)\})$ доставляє мінімум правій частині рівності (8). Тоді

$$B_s(z) = \min_{b_k} \left\{ \sum_{k=s}^{N-1} g_k(x(k), \Psi_k(b_k, x(k))) + \Phi(x(N)) \right\} = \tag{11}$$

$$= \sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(x^*(k),\, \Psi_k\left(b_k^*, x^*(k)\right)\right) + \Phi\left(x^*(N)\right) =$$

$$= g_s\left(z,\, \Psi_s\left(b_s^*, z\right)\right) + \sum_{k=s+1}^{N-1} g_k\left(x^*(k),\, \Psi_k\left(b_k^*, x^*(k)\right)\right) + \Phi\left(x^*(N)\right).$$

За принципом оптимальності і з означення функції Белмана випливає

$$\sum_{k=s+1}^{N-1} g_k\left(x^*(k),\, \Psi_k\left(b_k^*, x^*(k)\right)\right) + \Phi\left(x^*(N)\right) =$$

$$= \min_{b_k}\left\{\sum_{k=s+1}^{N-1} g_k\left(x(k),\, \Psi_k\left(b_k, x(k)\right)\right) + \Phi\left(x(N)\right)\right\} = B_{s+1}\left(x\left(s+1,\, z\right)\right).$$

Тут $\{x(k,\, z)\}$ — розв'язок задачі Коші (9)–(10) за умови $\{\Psi_k(b_k, x)\} = \{\Psi_k(b_k^*, x)\}$. Отже,

$$B_s(z) = g_s\left(z,\, \Psi_s\left(b_s^*, z\right)\right) + B_{s+1}\left(x\left(s+1,\, z\right)\right).$$

Враховуючи, що $x(s+1,\, z) = f_s\left(z,\, \Psi_s\left(b_s^*\right)\right)$, отримаємо

$$B_s(z) = g_s\left(z,\, \Psi_s\left(b_s^*, z\right)\right) + B_{s+1}\left(f_s\left(z,\, \Psi_s\left(b_s^*, z\right)\right)\right). \tag{12}$$

Якщо замість $\left(\{b_k^*\},\, \{x^*(k)\}\right)$ в (11) підставити довільну допустиму пару $\left(\{b_k\},\, \{x(k)\}\right)$, то права частина рівності може тільки збільшитись. Тобто,

$$B_s(z) = \min_{b_k}\left\{\sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(x(k),\, \Psi_k\left(b_k, x(k)\right)\right) + \Phi\left(x(N)\right)\right\} \le \tag{13}$$

$$\le \sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(x(k),\, \Psi_k\left(b_k, x(k)\right)\right) + \Phi\left(x(N)\right).$$

Тому в (12) ми маємо

$$B_s(z) \le g_s\left(z,\, \Psi_s\left(b_s, z\right)\right) + B_{s+1}\left(f_s\left(z,\, \Psi_s\left(b_s, z\right)\right)\right).$$

Враховуючи (9), для оптимальної пари $\left(\{b_k^*\},\, \{x^*(k)\}\right)$ у (13) ми отримуємо рівність

$$B_s(z) = \min_{b_s}\left\{g_s\left(z,\, \Psi_s\left(b_s, z\right)\right) + B_{s+1}\left(f_s\left(z,\, \Psi_s\left(b_s, z\right)\right)\right)\right\}. \tag{14}$$

Співвідношення (14) називається дискретним рівнянням Белмана.

3. Алгоритм структурно–параметричної оптимізації лінійної дискретної системи керування

Розглянемо лінійну систему керування з квадратичним критерієм якості

$$J(x,\, u) = \langle P_0\, x(N),\, x(N)\rangle \;\to\; \inf \tag{15}$$

при умовах

$$x(k+1) = A(k)\; x(k) + B(k)\; u(k),\; k = 0,\, 1,\, ...,\, N-1, \tag{16}$$

$$x(0) = x_0. \tag{17}$$

Тут $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор фазових координат, $u \in \mathbb{R}^m$ — функція керування, P_0 — невід'ємновизначена симетрична матриця nxn, $A(k)$ — матриця $n \times n$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, $B(k)$ — матриця $n \times m$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Керування задано у вигляді

$$u(k) = R(b_k)\, x(k), \;\; k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{18}$$

де $R(b_k)$ — матриця розмірності $m \times n$, яка залежить від параметрів $b_k \in \mathbb{R}^{i_k}$. Запишемо дискретне рівняння Белмана для задачі (15)–(18).

$$B_s(z) = \min_{b_s} \{0 + B_{s+1}(A(s)\, z + B(s)\, R(b_s)\, z)\}, \;\; s = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$B_N(z) = \langle P_0\, z, z \rangle .$$

Функцію Белмана будемо шукати у вигляді

$$B_s(z) = \langle P(s)\, z, z \rangle ,$$

де $P(s)$ — матриця $n \times n$. При цьому $P(N) = P_0$. Розглянемо функцію

$$\begin{gathered} I = B_{s+1}(A(s)\, z + B(s)\, R(b_s)\, z) = \\ = \langle P(s+1)\, (A(s)\, z + B(s)\, R(b_s)\, z), A(s)\, z + B(s)\, R(b_s)\, z \rangle = \\ = \langle P(s+1)\, A(s)\, z, A(s)\, z \rangle + \langle P(s+1)\, A(s)\, z, B(s)\, R(b_s)\, z \rangle + \\ + \langle P(s+1)\, B(s)\, R(b_s)\, z, B(s)\, R(b_s)\, z \rangle + \\ + \langle P(s+1)\, B(s)\, R(b_s)\, z, A(s)\, z \rangle = \\ = \langle P(s+1)\, A(s)\, z, A(s)\, z \rangle + \left\langle P(s+1)\, A(s)\, z\, z^T, B(s)\, R(b_s) \right\rangle + \\ + \left\langle P(s+1)\, B(s)\, R(b_s)\, z\, z^T, B(s)\, R(b_s) \right\rangle + \\ + \left\langle B(s)\, R(b_s), P^T(s+1)\, A(s)\; z\, z^T \right\rangle . \end{gathered}$$

Перепишемо цю функцію у вигляді

$$\begin{gathered} I = \left\langle A^T(s)\, P(s+1)\, A(s)\, z, z \right\rangle + \left\langle R^T(b_s)\, B^T(s)\, P(s+1)\, A(s)\, z, z \right\rangle + \\ + \left\langle R^T(b_s)\, B^T(s)\, P(s+1)\, B(s)\, R(b_s)\, z, z \right\rangle + \\ + \left\langle A^T(s)\, P(s+1)\, B(s)\, R(b_s)\, z, \; z \right\rangle = \langle C(s)\, z, z \rangle , \end{gathered}$$

де $C(s)$ — матриця $n \times n$. Рівняння Белмана записується так

$$B_s(z) = \min_{b_s} I. \tag{19}$$

Необхідна умова мінімуму має вигляд $\frac{dI}{db_s} = 0$. Знайдемо похідну

$$\begin{gathered} \frac{dI}{db_s} = \left\langle P(s+1)\, A(s)\, z\, z^T, B(s)\, \frac{\partial R(b_s)}{\partial b_s} \right\rangle + \\ + \left\langle P^T(s+1)\, A(s)\, z\, z^T, B(s)\, \frac{\partial R(b_s)}{\partial b_s} \right\rangle + \\ + \left\langle P(s+1)\, B(s)\, \frac{\partial R(b_s)}{\partial b_s}, \; B(s)\, R(b_s)\, z\, z^T \right\rangle + \\ + \left\langle P(s+1)\, B(s)\, R(b_s), B(s)\, \frac{\partial R(b_s)}{\partial b_s} z\, z^T \right\rangle . \end{gathered}$$

Після перетворень отримаємо

$$\frac{dI}{db_s} = \left\langle \frac{\partial R^T(b_s)}{\partial b_s} B^T(s)\ P(s+1)\ A(s)\ z,\ z \right\rangle + \tag{20}$$

$$+\left\langle\ A^T(s)\ P(s+1)\ B(s)\ \frac{\partial R(b_s)}{\partial b_s}\ z,\ z\ \right\rangle +$$

$$\left\langle R^T(b_s)\, B^T(s)\ P(s+1)\ B(s)\ \frac{\partial R(b_s)}{\partial b_s}\ z,\ z \right\rangle +$$

$$+\left\langle \frac{\partial R^T(b_s)}{\partial b_s} B^T(s)\ P(s+1)\ B(s)\ R(b_s)\ \ z,\ z \right\rangle .$$

З того, що оптимальний розв'язок, а отже, і оптимальний набір параметрів у задачі (1)–(3) існує, випливає, що мінімум в правій частині співвідношення (19) досягається. Тому ми можемо виписати матричне рівняння для знаходження невідомої матриці P

$$\langle P(s)\ z,\ z\rangle = \langle C(s)\, z,\ z\rangle\,.$$

Тому що $z \in \mathbb{R}^n$ — довільне, то $P(s) = C(s)$ і

$$P(s) = A^T(s)\, P(s+1)\ A(s) + R^T(b_s)\, B^T(s)\ P(s+1)\ A(s) + \tag{21}$$

$$+R^T(b_s)\, B^T(s)\ P(s+1)\ B(s)\ R(b_s) + A^T(s)\, P(s+1)\, B(s)\ R(b_s)\,,$$
$$P(N) = P_0.$$

Отже, чисельний алгоритм визначення оптимальних значень параметрів b_k в даному випадку може бути таким:

- Задаємо початкові наближення векторів параметрів $b_k^{(0)}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.
- Знаходимо $R\left(b_k^{(0)}\right)$ та $\frac{\partial R}{\partial b_k}\left(b_k^{(0)}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.
- Розв'язуємо матричне рівняння (21) та знаходимо матрицю $P(k)$ для кожного $k = 0, 1, \ldots, N-1$.
- Знаходимо $\frac{dI}{db_k}$, використовуючи співвідношення (20).
- Ітераційна процедура для визначення оптимальних значень b_k^* буде мати вигляд

$$b_k^{(i+1)} = b_k^{(i)} + \alpha_i\, \frac{dI}{db_k},\ \ i = 0, 1, \ldots. \tag{22}$$

- Після визначення оптимального набору параметрів b_k^* за допомогою процедури (22), підставляємо його у систему (16) та знаходимо оптимальну траєкторію $x^*(k)$, $k = 0, 1, \ldots N-1$.
- Знаходимо оптимальне керування $u^*(k) = R(b_k^*)\ x^*(k)$.

Література

1. Башняков О. М. Практична стійкість, оцінки та оптимізація / О. М. Башняков, Ф. Г. Гаращенко, В. В. Пічкур — К.: Київський університет. — 2008. — 383 с.
2. Бублик Б. Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б. Н.Бублик, Ф. Г. Гаращенко, Н. Ф. Кириченко — К.: Наукова думка, 1985. — 304 с.
3. Михалевич В. С. Глобальный и локальный анализ программ управления динамическими процессами, описываемыми дифференциальными уравнениями с дискретным множеством управлений / В. С. Михалевич, В. И. Попадинец, А. Н. Голодников, А. В. Ищенко // Кибернетика. — 1985. — №2. — С. 1–6.
4. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев — М.: Наука, 1975. — 528 с.
5. Руденко А. В. Об аппроксимации скользящих режимов в системах с ограничением на частоту переключений / А. В. Руденко // Кибернетика и вычислительная техника. — 1987. — Вып. 75. — С. 44–48.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна;
Інститут математики, економіки та механіки, Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, вул. Дворянська, 2, Одеса, 23454, Україна

Надійшла 03.11.2010